This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909652 1

OKF
Campagnon

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LES

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LES

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE,

DIVISÉES

EN LIVRES, CHAPITRES ET PARAGRAPHES,

ET CONTENANT QUELQUES INDICATIONS

SUR LA MANIÈRE DE RÉSOUDRE CERTAINES QUESTIONS;

PAR

P.-F. COMPAGNON,

ANCIEN PROFESSEUR DE L'UNIVERSITÉ.

Ces Questions s'adressent aux Élèves des classes de Mathématiques élémentaires, aux Élèves des différentes classes de Lettres et à ceux de l'Enseignement secondaire spécial.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1877

(Tous droits réservés.)

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

AVERTISSEMENT.

Pour s'assurer que les élèves ont bien compris les *Éléments de Géométrie*, il est bon de leur proposer des questions sur ce qu'ils ont déjà vu, de constater comment ils les traitent lorsqu'ils sont abandonnés à eux-mêmes, de leur signaler avec soin les fautes qu'ils commettent, de leur montrer comment on passe d'une question particulière à une question plus générale ou à des questions analogues, etc. Telles sont les raisons qui m'ont engagé à réunir dans ce Recueil un certain nombre d'Exercices.

Toutefois, on ne saurait trop recommander aux élèves d'insister avant tout sur les propositions contenues dans le texte des *Éléments* et de ne pas les confondre avec les questions qui s'y rattachent.

J'ai divisé ce Recueil en Livres, Chapitres et Paragraphes, qui se rapportent aux différents Livres, Chapitres et Paragraphes de mes *Éléments de Géométrie* et, en général, j'ai cherché à ne proposer que des questions connues et peu difficiles, laissant aux professeurs le soin d'en proposer d'autres qui soient plus en rapport avec la force et la capacité de leurs élèves ou avec le but que ces élèves poursuivent.

Je ne pense pas qu'il y ait lieu, comme on le fait ordinairement, de placer des questions à la suite des *Éléments*, ou à en intercaler dans le texte ; à mon avis, ces *Éléments* doivent former un Ouvrage classique, bien délimité, que les élèves puissent étudier et comprendre depuis la première ligne jusqu'à la dernière, une sorte de *logique pratique* très-propre à développer et à fortifier leurs facultés intellectuelles.

Le mieux me semble donc de présenter les *Éléments de Géométrie* dans un Ouvrage à part, sans y proposer aucune question et sans y joindre non plus des notions sur quelques courbes usuelles, sur le levé des plans, sur l'arpentage.

D'ailleurs, cette manière de procéder laisse plus de latitude pour le choix des questions et elle permet aussi, lorsqu'il s'agit de questions un peu difficiles, de mettre les élèves sur la voie en leur donnant quelques indications sur la marche à suivre, sur les constructions à effectuer, etc.

Remarque. — Ce Recueil contient quelques questions qui sont résolues dans les Notes de mes *Éléments de Géométrie* et j'ai soin de les signaler : ce sont, en général, des questions que les élèves doivent connaître plus particulièrement et je n'ai pas craint de faire ces doubles emplois.

Je terminerai en appelant l'attention des élèves sur les trois Notes qui terminent ces Questions. La première est relative aux *lieux géométriques*, la seconde à *différentes méthodes pour résoudre les problèmes* et la troisième à *quelques indications pour démontrer les théorèmes*. Enfin nous leur recommandons aussi de discuter les pro-

blèmes avec soin. Ce genre d'exercices donne de la force et de la rectitude à l'esprit, et s'il paraît d'abord un peu difficile, un peu pénible, il finit souvent par avoir de l'attrait, par procurer une vraie satisfaction en faisant voir les modifications que présente la résolution d'un problème, lorsqu'on fait varier d'une manière continue la figure que l'on considère.

P.-F. C.

Paris, le 14 mai 1877.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LES

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

QUESTIONS SUR LE LIVRE I.

CHAPITRE I.

§ I et II. — Sur la ligne droite et la ligne brisée. — Sur la plus petite et la plus grande droite qu'on puisse mener d'un point à une circonférence.

Question 1. Si d'un point O, pris dans l'intérieur d'une ligne brisée fermée, composée de trois côtés AB, BC, CA, on mène les droites OA, OB, OC, la somme de ces droites est moindre que la somme des côtés de la ligne brisée; mais elle est plus grande que la moitié de cette somme. Ainsi il s'agit de démontrer les inégalités

$$OA + OB + OC < AB + BC + CA$$

et

$$OA + OB + OC > \tfrac{1}{2}(AB + BC + CA).$$

2. Si deux droites AB, CD se coupent en un point O et qu'on mène les droites AC, BD, la somme des deux premières droites est plus grande que la somme des deux autres.

3. Si deux droites AB, CD se coupent en un point O et qu'on mène les droites AC, CB, BD, DA, la somme des deux premières droites est moindre que la somme des quatre autres; mais elle est plus grande que la moitié de cette somme.

Remarque. — D'après les définitions relatives au triangle et au quadrilatère (*voir* les nos 53, 54, 55, 56 de nos *Éléments de Géométrie*), les trois théorèmes précédents peuvent s'énoncer comme il suit :

1° Si d'un point, pris dans l'intérieur d'un triangle, on mène trois droites aux sommets de ce triangle, la somme de ces droites est moindre que le périmètre du triangle et plus grande que la moitié de ce périmètre.

2° Dans un quadrilatère convexe la somme des diagonales est plus grande que la somme de deux côtés opposés.

3° Dans un quadrilatère convexe, la somme des diagonales est moindre que le périmètre de ce quadrilatère et plus grande que la moitié de ce périmètre.

4. Étant donnée une ligne brisée ABC, si l'on joint un point D du côté AB à un point E du côté BC, la ligne brisée ADEC est convexe.

Remarque. — En joignant deux points F et G, pris sur deux côtés consécutifs AB, DE de la ligne ADEC, on aurait une ligne brisée convexe de quatre côtés AFGEC et ainsi de suite.

5. Si l'on prend deux points O, O′ sur une droite indéfinie xy et qu'on les joigne à deux points A, B, situés d'un même côté de la droite, il est impossible qu'on ait $OA = OB$ et $O'A = O'B$. (On distinguera quatre cas, suivant que le point B sera situé sur la portion de plan AOO′, ou entre les prolongements AC et AD des droites OA et O′A, ou sur les portions de plan $CAO'y$ et $DAOx$.)

Remarque. — De ce théorème il résulte que deux circonférences O, O′ ne peuvent pas avoir deux points communs A et B d'un même côté de la ligne droite OO′.

6. Quel est le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'une circonférence donnée? (Distinguer trois cas, suivant que la distance donnée est plus grande ou plus petite que le rayon de la circonférence ou égale à ce rayon.)

CHAPITRE II.

§ I et II. — Sur les positions relatives de deux circonférences.
— Sur la dépendance des arcs et des cordes.

---

7. Lorsque deux circonférences O, O′ sont extérieures ou intérieures l'une à l'autre, la plus petite et la plus grande droite qu'on puisse mener d'un point de la première à un point de la seconde sont situées toutes les deux sur la ligne droite OO′ qui passe par les centres.

8. Décrire, avec un rayon donné, une circonférence passant par deux points donnés. (Nous ne proposons ici ce problème que pour le rappeler à l'attention des élèves, car il a été *résolu* et *discuté* dans la Note 4 de nos *Éléments*.)

9. Décrire, avec un rayon donné, une circonférence tangente à une circonférence donnée en un point donné.

Remarque. — Dans ce problème, ainsi que dans les questions suivantes, on suppose connu le centre de la circonférence donnée.

10. Quel est le lieu des centres des circonférences décrites, avec un rayon donné, et tangentes extérieurement à une circonférence donnée?

11. Quel est le lieu des centres des circonférences décrites, avec un rayon donné, et tangentes intérieurement à une circonférence donnée?

12. Décrire, avec un rayon donné, une circonférence passant par un point donné et tangente extérieurement à une circonférence donnée.

13. Décrire, avec un rayon donné, une circonférence passant par un point donné et tangente intérieurement à une circonférence donnée.

14. Décrire, avec un rayon donné, une circonférence tangente extérieurement à deux circonférences extérieures l'une à l'autre. (Ce problème n'est qu'un cas très-particulier de celui-ci : Décrire, avec un rayon donné, une circonférence tangente à deux circonférences données.)

15. Étant donnés deux arcs décrits avec un même rayon, dont la longueur est connue, trouver un troisième arc de même rayon que les premiers et égal à leur somme ou à leur différence.

CHAPITRE III.

§ I, II et III. — Sur les angles, les perpendiculaires et obliques, les parallèles.

16. Trouver deux droites dont on connaît la somme et la différence. (Même question, en remplaçant les droites par des angles.)

17. Étant donnés, sur une droite indéfinie xy, deux points A et B, le point O milieu de AB et un point quelconque M, la distance MO sera égale à la demi-somme ou à la demi-différence des distances MA et MB, selon que le point M sera situé sur les prolongements de AB ou entre les points A et B. (De même, étant donnés un angle AOB, sa bissectrice OC et une droite quelconque OM, l'angle MOC sera égal à la demi-somme ou à la demi-différence des angles MOA et MOB, selon que la droite OM sera extérieure ou intérieure à l'angle AOB.)

18. Étant donnés deux points A et B, déterminer d'autres points de la droite AB, en se servant seulement du compas.

19. Si quatre angles AOB, BOC, COD, DOA, formés autour du point O, sont tels que les angles AOB, COD soient égaux, ainsi que les angles BOC, DOA, les côtés OA, OC sont en ligne droite, ainsi que les côtés OB, OD.

20. D'un point O, pris dans l'intérieur d'un triangle ABC rectangle en B, on mène la droite OA et l'on abaisse OD perpendiculaire sur le côté BC; démontrer que la somme des droites AO et OD est moindre que l'hypoténuse AC.

21. Trouver sur une droite donnée un point également distant de deux points donnés.

22. Si deux droites AB, CD sont parallèles, deux autres

droites EF, GH, respectivement parallèles aux premières, sont parallèles entre elles.

§ IV. — Sur les triangles, les quadrilatères, les polygones.

Sur les triangles.

23. Étant donnés deux angles d'un triangle, trouver le troisième.

24. Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un angle aigu inégal, au plus grand angle aigu est opposé le plus grand côté.

25. Si du sommet d'un angle xAy on prend sur l'un des côtés Ax deux longueurs quelconques AB, AC, et sur l'autre côté Ay des longueurs AB′, AC′, respectivement égales aux premières et qu'on mène les droites BC′, CB′, ces lignes se couperont sur la bissectrice de l'angle A. (De là un moyen de mener la bissectrice d'un angle donné.)

26. Si un angle A d'un triangle ABC est compris entre des côtés inégaux, la médiane, menée du sommet de cet angle, fait avec les côtés de ce même angle des angles inégaux, et celui qu'elle forme avec le plus grand des deux côtés est le plus petit. (Prolonger la médiane AD d'une longueur DM = AD et joindre BM; les triangles ADC et MDB seront égaux, etc.)

Remarque. — De ce théorème il résulte que, si dans un triangle ABC le côté AB est plus grand que le côté AC, la bissectrice AE de l'angle A divise le côté BC en deux segments inégaux BE, EC, et que le segment adjacent au plus grand côté est le plus grand.

D'ailleurs, on voit facilement que l'angle AEC est aigu et, par conséquent, la hauteur AF du triangle ABC, issue du sommet A, doit rencontrer le côté BC sur le prolongement de la droite BE au delà du point E.

Ainsi la bissectrice d'un angle d'un triangle est toujours comprise, en grandeur et en position, entre la médiane et la hauteur issues du sommet de ce même angle, à moins que les côtés qui comprennent l'angle ne soient égaux, auquel cas les trois droites en question se confondent.

On peut se proposer de démontrer directement l'une des conséquences qui précèdent; savoir : Si dans un triangle ABC le côté AB est plus grand

que le côté AC, la bissectrice AE de l'angle A divise le côté BC en deux segments inégaux BE, EC, et celui qui est adjacent au plus grand côté est le plus grand. (Sur le côté AB prendre AG = AC et joindre GE; on aura EG = EC, et il sera facile de comparer les droites BE et EG qui sont les côtés d'un même triangle GBE, etc.)

Observation. — S'il ne s'agissait dans ce Recueil que de faire connaître une démonstration de telle ou telle proposition, il serait avantageux de réserver la question 26 pour le Livre III; alors elle ne serait, ainsi que ses conséquences contenues dans la remarque ci-dessus, que des corollaires immédiats d'un théorème très-connu (*voir* nos *Éléments*, 249). Mais il s'agit plutôt d'exercer l'intelligence des élèves, en leur faisant voir comment des vérités peuvent s'établir de différentes manières et comment on en peut démontrer quelques-unes avec le seul secours du premier Livre, lors même qu'on pourrait les démontrer plus facilement par la suite.

27. Dans un triangle ABC on mène la bissectrice AD de l'angle A, qui rencontre BC au point D, et il s'agit : 1° de démontrer que la différence des angles ADB, ADC est la même que celle des angles C et B; 2° de trouver les angles ADB et ADC, sachant que la différence des angles C et B est égale à un angle donné δ. (Pour ce 2°, *voir* la quest. 16.)

28. Dans un triangle ABC, l'angle formé par la bissectrice AD de l'angle A et par la perpendiculaire AE abaissée du sommet A sur le côté BC est égal à la demi-différence des angles C et B. Dans un triangle ABC, le côté AB est plus grand que le côté AC, sur AB on prend une longueur AD = AC et l'on joint DC; démontrer qu'on a aussi angle $DCB = \frac{C - B}{2}$.

29. Dans un triangle ABC, on mène les bissectrices des angles B et C, qui se rencontrent au point O; démontrer que l'angle BOC est égal à un droit, plus la moitié de l'angle A.

30. Étant donné un triangle ABC, on prolonge le côté BA au delà du sommet A d'une longueur AD égale à AC, on joint DC et par le point A on mène AE parallèle à DC; démontrer que AE est la bissectrice de l'angle BAC,

31. Un triangle ABC est isoscèle : 1° lorsque l'une de ses médianes AD est en même temps l'une de ses hauteurs; 2° lorsque la bissectrice AD de l'un de ses angles est perpendiculaire sur

le côté opposé; 3° lorsque la bissectrice AD de l'un de ses angles passe par le milieu du côté opposé. (Pour démontrer ce 3°, prolonger AD d'une longueur DE = AD et joindre EB, etc.)

32. Dans un triangle isoscèle ABC, les perpendiculaires abaissées des extrémités de la base BC sur les côtés opposés sont égales, et il en est de même des médianes et des bissectrices issues des sommets B et C.

33. Si dans un triangle ABC l'angle B est droit ou obtus, les perpendiculaires abaissées des sommets B et C sur les côtés opposés sont inégales et la seconde est plus grande que la première. (De là il résulte que, si les hauteurs issues des sommets B et C sont égales, les angles B et C sont aigus.)

34. Si dans un triangle les perpendiculaires abaissées de deux sommets sur les côtés opposés sont égales, le triangle est isoscèle.

Remarque. — On verra par la suite qu'un triangle est aussi isoscèle lorsque deux de ses médianes ou deux de ses bissectrices sont égales. (*voir* les quest. 59 et 149, *Rem.*)

35. Étant donné un triangle équilatéral ABC, on prend sur les côtés AB, BC, CA, à partir des sommets A, B, C, des distances égales AA′, BB′, CC′; démontrer que le triangle A′B′C′ est aussi équilatéral.

Sur les quadrilatères et les polygones.

36. Deux quadrilatères convexes sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal et leurs quatre côtés égaux chacun à chacun et disposés de la même manière.

37. L'angle formé par les bissectrices de deux angles consécutifs d'un quadrilatère convexe est égal à la demi-somme des deux autres angles du quadrilatère, et l'angle formé par les bissectrices de deux angles opposés est égal à la demi-différence des deux autres angles.

38. Quel est le lieu des points situés à une distance donnée d'une droite donnée? (Cette question est analogue à la quest. 6.)

39. Trouver un point également distant de deux points donnés et situé à une distance donnée d'une droite donnée.

40. Étant donné un parallélogramme ABCD, on prend sur les côtés AB, BC, CD, DA, à partir des sommets A, B, C, D, des distances AA′, BB′, CC′, DD′, telles que $AA' = CC'$ et que $BB' = DD'$; démontrer que le quadrilatère A′B′C′D′ est aussi un parallélogramme et que les diagonales des deux parallélogrammes se coupent en un même point.

41. Les bissectrices des angles d'un quadrilatère convexe forment un second quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires. Si le premier quadrilatère est un parallélogramme, le second est un rectangle dont les diagonales sont parallèles aux côtés du parallélogramme et égales à la différence de ses côtés adjacents; et, si le premier quadrilatère est un rectangle, le second est un carré.

Remarque. — Il arrive souvent qu'une figure bien faite facilite une démonstration, et c'est ce qui a lieu pour la seconde partie de cette question.

42. Deux trapèzes ABCD, A′B′C′D′ sont égaux lorsqu'ils ont leurs quatre côtés égaux chacun à chacun et disposés de la même manière. (Mener BE parallèle à AD entre les bases du premier et B′E′ parallèle à A′D′ entre les bases du second, etc:)

43. De tous les points d'une droite indéfinie xy on mène des droites égales parallèles et dirigées dans le même sens; quel est le lieu des extrémités de ces droites? (Même question, en remplaçant la droite xy par une circonférence.)

44. Un polygone convexe ne peut avoir plus de trois angles intérieurs aigus.

45. Le nombre des diagonales d'un polygone convexe de n côtés est donné par l'expression $\frac{n(n-3)}{2}$.

§ V. — Sur les propositions diverses.

46. Trouver un point également distant de deux points donnés et également distant de deux droites données.

47. Les bissectrices de deux angles, qui ont leurs côtés respectivement parallèles, sont parallèles ou perpendiculaires entre elles.

48. Les droites qui joignent les milieux des côtés d'un triangle divisent ce triangle en quatre triangles égaux entre eux.

49. Les droites qui joignent successivement les milieux d'un quadrilatère forment un parallélogramme. Dans quels cas ce parallélogramme devient-il un losange, un rectangle, un carré?

50. Quel est le lieu des milieux des droites menées d'un point donné aux différents points d'une droite donnée xy? (Même question, en remplaçant la droite donnée par une circonférence.)

51. La droite qui joint le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle au milieu de l'hypoténuse est égale à la moitié de cette hypoténuse.

52. Si l'hypoténuse d'un triangle rectangle est double de l'un des côtés de l'angle droit, l'un des angles aigus est double de l'autre; ainsi le premier de ces angles vaut $\frac{2}{3}$ de droit. Réciproquement, si l'un des angles aigus d'un triangle rectangle vaut $\frac{2}{3}$ de droit, l'hypoténuse est double du côté de l'angle droit adjacent à cet angle. (Le triangle rectangle en question est la moitié d'un triangle équilatéral.)

53. Les points E et F étant les milieux des côtés opposés AB et CD d'un parallélogramme, démontrer que les droites BF et DE divisent la diagonale AC en trois parties égales.

54. Dans un triangle ABC, la bissectrice d'un angle A et les bissectrices des suppléments des angles B et C se coupent en un même point.

55. Déterminer la direction de la bissectrice de l'angle de deux droites qu'on ne peut prolonger jusqu'à leur point de concours.

56. Dans un triangle ABC, on mène, par le point d'intersection O des bissectrices des angles B et C, une parallèle à BC; démontrer que la portion DE de cette parallèle, comprise entre AB et AC, est égale à la somme des droites DB et EC. Si la parallèle à BC passait par le point d'intersection O′ de la bissectrice de l'angle B et de celle du supplément de l'angle C, la portion D de cette parallèle, comprise entre les côtés de l'angle A ou de leurs prolongements, serait égale à la différence des droites DB et EC.

57. Dans tout triangle, une médiane quelconque est moindre que la demi-somme des deux côtés issus du même sommet et plus grande que la moitié de l'excès de cette somme sur le troisième côté. Conclure de là que la somme des trois médianes est moindre que le périmètre du triangle et plus grande que sa moitié. Démontrer, en outre, que la somme des trois médianes est plus grande que les trois quarts du périmètre.

58. Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun et une médiane égale. (Deux cas.)

Observation. — Ordinairement on distingue trois cas d'égalité de triangles et quelquefois un quatrième cas (*voir* nos *Éléments*, Note 16), et il est bon de se borner à ces trois ou quatre cas qui résultent de trois égalités entre des parties d'un triangle. Autrement on aurait un nouveau cas d'égalité de triangles toutes les fois qu'en construisant un triangle avec trois données, le problème n'admettrait qu'une solution. Ainsi on pourrait dire que deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont des bases égales, adjacentes à un angle égal et correspondant à des hauteurs égales, etc., ce qui aurait des inconvénients.

59. Un triangle est isoscèle lorsque deux de ses médianes sont égales. (Rapprocher ce théorème des questions 32 et 34.)

60. Un angle d'un triangle est droit, aigu ou obtus, selon que la médiane issue du sommet de cet angle est égale à la moitié du côté opposé, plus grande ou plus petite que cette moitié. (De là il résulte que les trois réciproques sont vraies.)

Remarque. — La question 51 consiste à démontrer directement la première de ces réciproques; on pourrait de même se proposer de démontrer directement les deux autres.

61. Quel est le lieu des sommets des triangles qui ont une base commune BC et dans lesquels la médiane, menée du sommet B, est égale à une longueur donnée.

62. Dans un trapèze isoscèle (c'est-à-dire dont les côtés non parallèles sont égaux), les angles opposés sont supplémentaires et réciproquement.

63. Étant donnés deux points A et B, situés d'un même côté d'une droite xy, trouver sur cette droite un point C tel que l'angle ACx soit égal à l'angle BCy; un point tel, que l'angle ACx soit double de l'angle BCy. (Pour la première partie de cette question, on joindra le point A au point B′ symétrique du point B par rapport à xy, et le point d'intersection de AB′ avec xy sera le point cherché. Pour la seconde partie, on remarquera que le point B′, symétrique de B par rapport à xy, doit être à égale distance de xy et de la droite AC prolongée, etc.)

DIFFÉRENTES QUESTIONS SUR CE CHAPITRE III.

64. Étant donné un triangle isoscèle ABC, si d'un point quelconque D de la base BC on mène des parallèles DE, DF aux côtés égaux AC, AB jusqu'à la rencontre de ces côtés, la somme de ces parallèles est constante. Et, si du point D on élève sur BC une perpendiculaire qui rencontre l'un des côtés égaux en E et le prolongement de l'autre côté en F, la somme DE + DF sera aussi constante.

Observation. — Lorsqu'un théorème consiste à démontrer que telle grandeur est constante, comme cela a lieu dans ces deux questions, on commence ordinairement par déterminer la valeur de la constante et alors on n'a plus qu'à démontrer une égalité dont le second membre est connu.

Par exemple, dans la première de ces deux questions, si l'on suppose que le point D se confonde avec le sommet B, la parallèle DE devient

nulle et l'autre est égale à AB; donc la longueur de la constante est AB et la question revient à démontrer l'égalité

$$DE + DF = AB.$$

De même, si dans la seconde question on suppose le point D situé sur le milieu de BC, les points E et F se confondent avec le sommet A, d'où l'on conclut que la constante est égale à $2h$ (h désignant la hauteur du triangle issue du sommet A) et l'on n'a plus qu'à démontrer l'égalité

$$DE + DF = 2h.$$

65. La somme des distances d'un point quelconque de la base d'un triangle isoscèle aux deux autres côtés est constante. Et, si le point est pris sur l'un ou l'autre des prolongements de la base, la différence des distances de ce point aux mêmes côtés est aussi constante. (Dans ces deux cas la constante est la perpendiculaire h, abaissée de l'une des extrémités de la base sur le côté opposé.)

66. Étant donné un rectangle ABCD et ses diagonales xACy, x'BDy', qui se coupent au point O, si d'un point quelconque E pris sur le périmètre de ce rectangle on abaisse des perpendiculaires EF, EG sur les diagonales, la somme de ces perpendiculaires sera égale à la distance h de l'un quelconque des sommets A, B, C, D à la diagonale qui ne passe pas par ce sommet. Et, si d'un point quelconque E′, pris sur les prolongements des côtés du rectangle, on abaisse des perpendiculaires E′F′, E′G′ sur les diagonales, la différence de ces perpendiculaires sera aussi égale à la distance h. (Ces propositions résultent de ce que les quatre triangles OAB, OBC, OCD, ODA sont isoscèles.)

Remarque. — Si d'un point H, pris entre les côtés de l'angle y'Oy, par exemple, et non situé sur le côté DC, on abaisse des perpendiculaires sur xy et sur $x'y'$, la somme de ces perpendiculaires est plus grande ou plus petite que h. Alors, de cette proposition et de la première partie de la question 66 il résulte que *le périmètre du rectangle* ABCD *est le lieu géométrique de tous les points tels, que la somme de leurs distances aux droites xy et $x'y'$ soit égale à la longueur h.*

De même, *les prolongements des côtés du rectangle* ABCD *forment ensemble le lieu des points tels, que la différence de leurs distances aux droites xy et $x'y'$ soit égale à la longueur h.*

67. Si d'un point quelconque D, pris dans l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC, on abaisse des perpendiculaires DE, DF, DG sur les trois côtés AB, AC, BC, la somme de ces perpendiculaires est constante. (Il est facile de voir que la constante est égale à l'une des hauteurs h du triangle.)

Remarque. — Si le point D était extérieur au triangle ABC et compris, par exemple, entre les côtés prolongés de l'angle BAC, on aurait

$$DE + DF - DG = h.$$

68. Étant donné un triangle ABC, trouver sur le côté BC un point tel, que la somme de ses distances aux deux autres côtés soit un minimum.

69. Trouver dans l'intérieur d'un triangle un point tel, que la somme de ses distances aux trois côtés du triangle soit un minimum.

70. Dans tout quadrilatère, le point de rencontre des droites qui joignent les milieux des côtés opposés est situé sur le milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales.

71. Par un point donné A, mener une droite également distante de deux autres points donnés B et C.

72. Par un point donné, mener une droite qui fasse des angles égaux avec deux droites données.

73. Par un point, situé dans un angle donné, mener entre les côtés de l'angle une droite qui soit divisée par le point en deux parties égales.

74. D'un point donné hors d'un cercle mener une sécante telle, que sa partie extérieure soit égale à la partie comprise dans le cercle.

75. Entre les côtés d'un angle, mener une droite de longueur donnée et parallèle à une droite donnée.

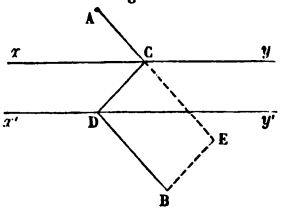
76. Étant données deux circonférences, mener d'un point de l'une à un point de l'autre une droite d'une longueur donnée et parallèle à une droite donnée.

Remarque. — La solution serait la même si l'on remplaçait l'une des circonférences par une droite ou par une ligne quelconque.

77. Étant donnés deux parallèles xy, $x'y'$, un point O et une droite MN, mener entre les deux parallèles une sécante parallèle à MN et dont les extrémités soient équidistantes du point O.

78. Étant données deux parallèles xy, $x'y'$ (*fig.* 1) et deux points A et B, situés hors des parallèles et de côtés différents, quelle est la plus petite ligne brisée ACDB allant de A en B et dont le côté CD, compris entre les deux parallèles, ait une direction donnée? (La longueur de la droite CD est connue et il s'agit de trouver le minimum de la somme AC + DB; or, si l'on mène BE parallèle et égale à CD et qu'on joigne CE, la ligne brisée ACE est égale à AC + DB; ainsi la question revient à trouver la longueur minimum de la ligne ACE dont les extrémités A et E sont connues et dont le point C doit être situé sur xy, etc.)

Fig. 1.



CHAPITRE IV.

§ I et II. — Sur le rayon perpendiculaire à une corde, l'angle inscrit dans un demi-cercle, la tangente.

79. Par un point A, pris dans l'intérieur d'une circonférence, mener la plus petite corde possible BC, et démontrer que les cordes passant par le point A sont d'autant plus grandes qu'elles font avec BC un plus grand angle aigu.

80. Si deux circonférences se coupent en A et B et qu'on mène par le point A deux diamètres, les extrémités de ces diamètres et le point B sont en ligne droite. On a un triangle ABC rectangle en A ; d'un point quelconque D pris sur l'hypoténuse on élève sur cette droite une perpendiculaire qui coupe le côté AB, par exemple en E, et le côté AC prolongé en F, on mène les droites FB et CE qui se rencontrent en M : quel est le lieu des points M ?

81. Quel est le lieu géométrique des milieux de cordes inscrites dans un cercle donné et passant par un point donné?

Remarque. — Ce lieu n'est qu'une portion du lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du centre sur toutes les droites qui passent par le point donné, si ce point est extérieur au cercle.

82. Si, à partir d'un point A d'une circonférence, on prend sur cette circonférence deux arcs égaux AB, AC, la droite, menée par le point A parallèlement à la corde BC, sera tangente à la circonférence.

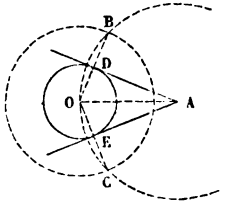
83. Si deux circonférences égales se coupent orthogonalement, c'est-à-dire à angles droits, la corde commune est égale à la distance des centres.

84. Étant donnés une circonférence O et un point O′ exté-

rieur, décrire du point O, comme centre, une seconde circonférence qui coupe la première orthogonalement.

85. Étant donnée une circonférence O de rayon R (*fig.* 2) et un point A extérieur, on décrit, du point O comme centre, avec le rayon 2R, une seconde circonférence, puis une troisième circonférence ayant pour centre le point A et pour rayon AO. Cette dernière circonférence coupe la précédente aux points B, C, et l'on mène les droites OB, OC, qui rencontrent la première circonférence aux points D et E : démontrer que AD et AE sont tangentes à la circonférence donnée.

Fig. 2.



Remarque. — Ce théorème donne un moyen de mener une tangente à une circonférence par un point extérieur; mais alors, au lieu de décrire entièrement les circonférences ayant pour rayons 2R et AO, on se borne à en déterminer des arcs qui se coupent aux points B et C.

86. Étant donnés une circonférence O et un point A extérieur, on joint le point O au point A par une droite qui coupe la circonférence au point B, et de ce point on élève sur OA une perpendiculaire qui rencontre aux points C et D l'arc décrit du point O comme centre, avec OA pour rayon; on mène les droites OC, OD, qui coupent la circonférence O aux points E et F : démontrer que les droites AE et AF sont tangentes à la circonférence donnée. (De là encore un moyen de mener une tangente à une circonférence par un point extérieur.)

87. Soit une circonférence O qui touche les côtés d'un angle A aux points B, C et, par un point quelconque D de l'arc BDC, tournant sa convexité vers le sommet de l'angle, menons une tangente terminée aux côtés AB, BC, en E et en F; il s'agit de démontrer: 1° que le périmètre du triangle AEF est constant; 2° que la droite EF est vue du centre sous un angle constant. (Examiner ce que devient le théorème lorsque la tangente est menée par un point G de l'arc concave BGC.)

88. Étant donnés une circonférence et un point, mener par ce point une sécante telle, que sa partie comprise dans la circonférence ait une longueur donnée telle, que la somme

ou la différence des parties de la sécante comprises entre le point et la circonférence soit égale à une droite donnée. (Mêmes questions, en remplaçant la circonférence par deux parallèles.)

89. Décrire une circonférence passant par un point donné A et tangente à une droite xy en un point donné B. (Même question, en remplaçant la droite par une circonférence. Cas où la droite AB est tangente à cette circonférence.)

90. Décrire avec un rayon donné une circonférence tangente à deux droites données. Tangente à une droite et à un cercle donné.

91. Mener à une circonférence une tangente qui fasse un angle donné avec une droite donnée.

92. Des sommets d'un triangle, comme centres, décrire trois circonférences qui se touchent deux à deux.

93. Le diamètre du cercle inscrit dans un triangle rectangle est égal à l'excès de la somme des deux côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse.

CHAPITRE V.

§ I. — Sur la construction de triangles, de quadrilatères, de polygones.

94. Démontrer que les conditions $a < b + c$ et $a > b - c$, nécessaires et suffisantes pour que les trois droites a, b, c puissent être les côtés d'un triangle, reviennent à celles-ci : $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$, et réciproquement. (La condition $a > b - c$ suppose implicitement que le côté b est plus grand que c ou au moins égal à c, etc.)

95. Construire un triangle dont les angles sont donnés, et connaissant en outre la somme ou la différence de deux côtés, ou le périmètre, ou une hauteur, ou une bissectrice, ou une médiane, ou le rayon du cercle inscrit.

96. Construire un triangle dont on donne la base et l'un des angles à la base, et connaissant en outre la somme ou la différence des deux autres côtés, ou la hauteur ou la médiane correspondant à la base, ou la longueur de la bissectrice de l'angle donné, ou le rayon du cercle inscrit.

97. Construire un triangle, connaissant la base, la hauteur et la médiane qui correspondent à cette base, ou un côté et deux hauteurs, ou deux côtés et une médiane, ou un côté et deux médianes, ou les trois médianes.

98. Construire un triangle, connaissant un angle et deux hauteurs, ou un angle, une hauteur et le périmètre, ou un sommet et les pieds des perpendiculaires abaissées des deux autres sommets sur les côtés opposés.

99. Construire un triangle, connaissant les milieux de ses trois côtés.

100. Construire un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse de grandeur et de position et un côté de l'angle droit.

101. Construire un parallélogramme, connaissant ses diagonales et l'angle qu'elles font entre elles.

102. Construire un trapèze, connaissant les quatre côtés, ou les diagonales et les côtés parallèles.

103. Construire un quadrilatère, connaissant les quatre côtés et l'une des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

104. Construire un pentagone, connaissant les milieux de ses côtés.

105. D'un point comme centre, décrire une circonférence qui intercepte sur une droite donnée une corde de longueur donnée.

106. D'un point comme centre, décrire une circonférence qui fasse avec une droite donnée un angle donné.

107. D'un point comme centre, décrire une circonférence qui coupe une circonférence donnée, de manière que la corde commune ait une longueur donnée. Question analogue, en remplaçant la circonférence par deux droites parallèles. (Elle se ramène immédiatement à la question 77.)

§ II. — Sur la division d'une droite en parties égales. — Division d'un angle droit en trois parties égales.

108. Diviser une droite AB en trois parties égales. (On trace une droite indéfinie Ax sur laquelle on porte une longueur quelconque de A en C et de C en D; on joint DB et l'on prolonge cette droite d'une longueur BE = DB; on mène la droite EC qui coupe AB au point F, et FB est le tiers de AB; car AB et EC sont des médianes du triangle ADE.)

Remarque. — Cette construction n'est qu'un cas particulier de celle qui est indiquée dans nos *Éléments* (154, *Rem. III*).

109. Si l'on divise la corde AB d'un arc de cercle en un nombre quelconque de parties égales, les rayons qui passent par les points de division ne partagent pas l'arc AB sous-tendu par la corde ou l'angle au centre AOB en parties égales.

Les arcs de même rang, à partir des extrémités de la corde, sont égaux entre eux; mais, selon que la corde AB est divisée en $2m$ ou $2m+1$ parties égales, les m ou les $m+1$ arcs qui se succèdent à partir de l'une des extrémités de la corde sont de plus en plus grands. (D'abord on voit que les arcs de même rang à partir de A et B sont égaux, en concevant qu'on mène le diamètre perpendiculaire sur la corde AB et qu'on rabatte l'une des demi-circonférences sur l'autre.)

Ensuite, pour fixer les idées, supposons que la corde AB ait été divisée en sept parties égales, AC, CD, DE, EF, ..., et, par conséquent, que l'arc AB ait été divisé en sept parties AC', C'D', D'E', E'F', ..., l'arc C'D', par exemple, sera moindre que le suivant D'E', ce qui revient à démontrer qu'on a l'angle $COD < DOE$.

Or, dans le triangle COE, le côté OC est plus grand que le côté OE et la droite OD est une médiane; donc, d'après la question 26, on a l'angle $COD < DOE$.

110. Diviser un angle droit yAx en trois parties égales. (Du sommet A comme centre, avec un rayon quelconque AB, on décrit un arc BC, compris entre les côtés de l'angle et du point B comme centre, avec le rayon BA, on décrit un second arc de cercle qui coupe le premier au point D; alors le triangle ABD est équilatéral et l'angle $BAD = \frac{2}{3}$ de droit, etc.)

Remarque. — D'après ce problème, il est facile de diviser un angle droit en 6, 12, 24, ... parties égales.

On verra dans le Livre IV comment on peut diviser un angle droit en 5, en 15 parties égales.

§ III. — Sur les contacts.

Observation. — Une droite est déterminée par deux quelconques de ses points et la circonférence par trois de ses points; pour cela, on dit qu'il faut deux conditions ou deux données pour déterminer une droite et qu'il en faut trois pour déterminer une circonférence.

Une droite est déterminée lorsqu'on connaît l'un de ses points et qu'elle doit être perpendiculaire ou parallèle à une droite donnée; donc chacune de ces conditions peut remplacer un point donné sur la droite et elle compte pour une condition.

Si une droite doit passer par un point extérieur à une circonférence

et être tangente à cette circonférence, cette condition de contact compte aussi pour une condition. Dans ce cas, la droite n'est pas tout à fait déterminée, puisqu'on peut mener par le point deux tangentes à la circonférence; mais on est censé n'en considérer qu'une, l'autre offrant une seconde solution du problème et le nombre des solutions étant limité.

De même, une droite est regardée comme déterminée lorsqu'elle doit être tangente à deux cercles donnés, etc.

Une circonférence est déterminée lorsqu'on connaît l'un de ses points et le centre : ainsi la donnée du centre équivaut à deux conditions; elle est aussi déterminée par deux de ses points et son rayon, d'où il résulte que le rayon équivaut à une condition, etc.

Remarque. — Un triangle est déterminé par trois de ses éléments ou par trois conditions (*voir* nos *Éléments,* Note 16, *Rem. II*); mais un triangle ABC est aussi déterminé lorsqu'on connaît la base BC, un des angles à la base et l'égalité $AB + AC = m$, m étant une longueur donnée; ainsi l'égalité équivaut à un élément donné, etc.

Si l'on veut construire un triangle ABC, connaissant seulement deux de ses éléments, BC, BA, par exemple, et en supposant que le côté BC soit donné de position, l'on pourra construire une infinité de triangles remplissant les deux conditions données et pouvant varier d'une manière continue, en même temps que l'angle B; alors chacun des points de la figure mobile décrira un lieu géométrique, et le sommet A, en particulier, décrira une circonférence. Il en sera de même toutes les fois qu'on se bornera à construire un triangle assujetti seulement à deux conditions données.

Si l'on donnait la base BC de grandeur et de position et l'égalité $AB + AC = m$, m étant une longueur donnée, le lieu des sommets A serait une courbe appelée *ellipse*.

De même, si pour construire un quadrilatère ABCD on ne donne que les trois côtés AB, BC, CD et la diagonale AC, le quadrilatère est indéterminé. Alors, après avoir construit le triangle ABC, si l'on fait varier le quadrilatère, les lieux géométriques du quatrième sommet D, du milieu de la diagonale BD, du milieu de la droite, qui joint les milieux des diagonales, sont des circonférences.

Maintenant, revenons aux questions proposées.

111. Étant données deux circonférences, mener une droite tangente à la première et coupant la seconde de manière que la corde interceptée soit égale à une longueur donnée; coupant les deux circonférences, de manière que les cordes interceptées soient respectivement égales à deux droites données.

112. Étant données une circonférence et une droite extérieure, déterminer sur la droite un point tel, que les tan-

gentes, menées de ce point à la circonférence, aient une longueur donnée; un point tel, que les tangentes, menées de ce point à la circonférence, fassent entre elles un angle donné.

113. Décrire, avec un rayon donné, une circonférence, tangente à une droite donnée et passant par un point donné; tangente à une droite et à une circonférence données.

114. Décrire une circonférence, tangente à une circonférence donnée et à une droite donnée, en un point de cette droite; tangente à une circonférence donnée et à une seconde circonférence donnée, en un point de cette circonférence; tangente à une droite donnée et à une circonférence donnée, en un point de cette circonférence.

115. Étant données deux circonférences O, O′ et une droite xy, trouver sur xy un point tel, que les tangentes, menées de ce point aux deux circonférences, soient également inclinées sur la droite xy.

116. Étant donné un triangle ABC, désignons par O le centre du cercle inscrit; par O′, O″, O‴ les centres des cercles exinscrits; par D, D′, D″, D‴ les points de contact de ces cercles avec le côté BC et avec ses prolongements au delà des sommets C et B; par E, E′, E″, E‴ et par F, F′, F″, F‴ les points de contact de ces mêmes cercles avec les côtés AC, AB et leurs prolongements, et enfin désignons par a, b, c les côtés BC, AC, AB; par $2p$ la somme de ces côtés ou le périmètre du triangle, on aura les relations suivantes :

1° Chacune des six tangentes AE′, AF′, BD″, BF″, CD‴, CE‴ est égale au demi-périmètre p du triangle ABC. (Considérons, par exemple, les tangentes BD″ et BF‴. On voit d'abord que ces deux droites sont égales, comme étant des tangentes menées à la circonférence O″ du point extérieur B; ainsi l'on a

$$BD'' = BF''.$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned} BD'' + BF'' &= a + CD'' + b + AF'' \\ &= a + CE'' + b + AE'' \\ &= a + b + c \\ &= 2p; \end{aligned}$$

donc chacune des tangentes BD″ et BF″ est égale à p.)

2° Chacune des distances d'un sommet, B par exemple, aux points de contact D, D′, D‴ est égale au demi-périmètre p, diminué de l'un des côtés du triangle. (Car on a

$$BD + CE'' + AE'' = p, \quad \text{d'où} \quad BD = p - b;$$
$$BD' = BF' = AF' - c = p - c;$$
$$BD''' = CD''' - a = p - a.)$$

Remarque I. — D'après les égalités précédentes, il est facile d'obtenir les distances entre deux des points de contact D, D′, D″, D‴ en fonction des côtés du triangle ABC. (On a

$$DD' = BD - BD' = c - b \quad \text{et} \quad D'D'' = BD'' - BD' = c;$$
$$DD'' = BD'' - BD = b \qquad D'D''' = BD' + BD''' = b;$$
$$DD''' = BD + BD''' = c \qquad D''D''' = BD''' + BD''' = c + b.)$$

Remarque II. — On a l'égalité

$$BD' = p - c;$$

d'ailleurs

$$CD + BF + AF = p, \quad \text{d'où} \quad CD = p - c;$$

donc BD′ = CD, et par conséquent les points de contact D, D′ sont équidistants du milieu du côté BC.

Il en est de même des points de contact D″ et D‴; car

$$BD''' = p - a = CD''.$$

Remarque III. — En se fondant sur la Remarque I, on peut construire le triangle ABC, connaissant l'un de ses côtés, b par exemple, et les rayons r et r'' des cercles O et O″. (Car b n'est autre que la distance DD″, et si aux points D, D″ on élève sur DD″, et d'un même côté de cette droite, les perpendiculaires DO, D″O″, respectivement égales aux rayons donnés r et r'', on connaîtra les centres O et O″; alors, en menant aux cercles O, O″ leur seconde tangente commune extérieure ainsi que leurs tangentes communes intérieures, on détermine deux triangles ABC, A′BC′ qui satisfont à la question; mais on peut reconnaître que ces deux triangles sont égaux.)

La Remarque I donne aussi le moyen de construire le triangle ABC, connaissant la somme $c + b$ et les rayons r'', r''' des cercles O″, O‴, ou bien connaissant la différence $c - b$ et les rayons r, r' des cercles O, O′.

DIFFÉRENTES QUESTIONS SUR CE PREMIER LIVRE.

Observation. — Nous réunissons sous ce titre quelques questions qui se rapportent à tout le premier Livre.

117. Étant donnés un cercle O et un diamètre AB, on prolonge AB, au delà du point B, d'une longueur BC moindre que OB, et du point C on mène une sécante CDE, dont la partie extérieure CD est égale au rayon OB; démontrer que l'angle ACD est le tiers de l'angle AOE.

118. Étant données deux parallèles coupées obliquement par la droite AB, et perpendiculairement par AC, on mène entre ces parallèles la droite BED, coupant AC au point E et telle que ED soit double de AB; démontrer que l'angle DBC est le tiers de l'angle ABC.

119. Étant donnés trois points A, B, C, mener la droite Ax de manière que la somme ou la différence des perpendiculaires abaissées sur Ax des points B et C soit égale à une longueur donnée. (Rapprocher ce problème de la question 71.)

120. Étant données deux parallèles xy, $x'y'$, deux points A et B, situés sur ces parallèles, et un point O en dehors, mener par ce point une droite qui coupe xy et $x'y'$ en deux points C et D tels, qu'on ait AC = BD, tels que la somme ou la différence des droites AC et BD soit égale à une longueur donnée.

121. Étant donnés deux systèmes de droites parallèles et un point, mener par ce point une sécante telle, que la partie de cette ligne comprise entre deux parallèles soit égale à la partie de cette même ligne comprise entre les deux autres parallèles.

122. Étant données deux circonférences qui se coupent, mener par l'un des points d'intersection A une droite BAC telle, que les cordes interceptées BA, AC soient égales entre elles; telle que la somme ou la différence des deux cordes soit égale à une distance donnée; telle que la somme des deux cordes soit un maximum. (Lorsqu'il s'agit de la somme des deux cordes, on suppose que les points B et C doivent se trouver de part et d'autre du point A, et, s'il s'agit de la différence des deux cordes, on suppose les points B et C d'un même côté, par rapport au point A.)

Remarque. — On verra que la somme des deux cordes est un maximum lorsque la sécante est parallèle à la ligne des centres, et alors elle est double de la distance des centres.

123. Étant données deux circonférences O, O′, mener une sécante parallèle à une droite donnée xy, et telle, que la somme des deux cordes interceptées soit égale à une longueur donnée. (En supposant le problème résolu, désignant par ABCD la parallèle cherchée; par OE, O′F les perpendiculaires abaissées des centres O, O′ sur les cordes AB, CD, on connaîtra la distance EF, et si l'on en retranche la somme connue EB + CF, on aura la longueur de la droite BC; ainsi l'on sera ramené à la question 76.)

124. Étant données deux parallèles xy, $x'y'$, deux points A, B, situés sur ces parallèles, et un point O, décrire de ce point, comme centre, une circonférence qui coupe xy et $x'y'$ en deux points C et D tels, qu'on ait AC = BD; tels que la somme ou la différence des deux droites AC et BD soit égale à une longueur donnée.

125. Étant donnés deux parallèles xy, $x'y'$ et un point O, décrire de ce point, comme centre, une circonférence telle, que la somme ou la différence des deux cordes interceptées AB, CD soit égale à une longueur donnée. Mêmes questions, en remplaçant les parallèles par deux droites qui se coupent.

126. Étant donnés deux cercles concentriques et un point O′, décrire de ce point, comme centre, une circonférence telle, qu'en menant une droite par les deux points d'intersection A, B, situés d'un même côté de la ligne des centres, cette droite passe par le centre commun O des cercles donnés, telle que cette droite soit parallèle à une droite donnée xy. (Dans la seconde partie de cette question, en supposant le problème résolu et désignant par M le milieu de la droite AB, la droite O′M sera perpendiculaire à AB, ainsi qu'à la droite parallèle à xy menée par le centre O; alors le point A sera le symétrique du point B par rapport à la droite O′M, et si, par rapport à cette même droite, on détermine la circonférence O″ symétrique de la circonférence OB, la distance O″A sera égale au rayon OB, et, par conséquent, le point A sera connu, etc.)

Remarque. — La solution de la seconde partie de cette question fait

voir le parti remarquable qu'on peut tirer quelquefois des *figures symétriques*.

127. Construire un triangle, connaissant un angle, la hauteur correspondante et le rayon du cercle inscrit.

128. Construire un triangle, connaissant la base, la différence des deux autres côtés et la différence des angles à la base.

129. Construire un triangle ABC, connaissant la base BC, la somme des deux autres côtés et la différence des angles à la base. (D'après la question 27, on connaît la direction de la bissectrice de l'angle A, et, par le point C, on peut mener une parallèle à cette bissectrice, etc.)

130. Sur deux droites rectangulaires on fait glisser une droite de longueur donnée; quel est le lieu décrit par le milieu de cette droite? (Rapprocher ce problème de la question 51.)

131. Quel est le lieu des centres des circonférences de même rayon qui divisent une circonférence donnée en deux parties égales?

132. Étant donnés un angle yAx et un point B sur Ay, trouver sur cette droite un second point également distant du point B et du côté Ax. (En supposant le problème résolu, désignant par C le point cherché; par CD la distance du point C à la droite Ax et par BE la distance du point B à la même droite Ax, on reconnaîtra sans peine que BD est bissectrice de l'angle CBE, etc. On aura une seconde solution en menant la bissectrice de l'angle ABE.)

QUESTIONS SUR LE LIVRE II.

CHAPITRE I.

§ I. — Sur la mesure des droites.

133. Démontrer que la diagonale AC et le côté AB d'un carré ABCD sont deux lignes incommensurables, en se fondant seulement sur le premier Livre.

Remarque. — Nous avons démontré cette proposition dans la Note 18 de nos *Éléments*, en établissant d'abord que la surface du carré construit sur la diagonale AC est double de la surface du carré ABCD et en faisant voir ensuite que, si le rapport de la diagonale AC au côté AB était un nombre commensurable $\frac{m}{n}$, ce nombre devrait être une fraction comprise entre 1 et 2 et que son carré $\frac{m^2}{n^2}$ devrait être égal à 2, ce qui est impossible.

134. Démontrer que la diagonale AC et le côté AB d'un carré ABCD sont deux lignes incommensurables, en se fondant sur la recherche de la plus grande commune mesure de ces deux lignes.

Remarque. — Cette proposition est aussi démontrée dans la Note 21 de nos *Éléments*.

Si l'on porte AB ou BC sur AC, on a

$$AC = BC + EC;$$

d'ailleurs, d'après un lemme, *le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle et isoscèle contient deux fois la différence entre l'hypoténuse et ce côté, plus un reste moindre que cette différence;* donc, en portant le reste EC sur BC et désignant par BF et FG des droites égales à EC, on

aura

$$BC = BF + FG + GC$$

ou

$$BC = 2EC + GC,$$

et, comme le triangle CEF est aussi rectangle et isoscèle, si l'on porte GC sur EF, il vient

$$EC = 2GC + \text{un reste } HC,$$

et ainsi de suite.

Donc la recherche de la plus grande commune multiple des droites AC et BC conduit à effectuer un nombre infini de superpositions, et de là on peut conclure que AC et BC sont incommensurables; car, si elles étaient commensurables, on sait que le nombre des superpositions devrait être limité.

§ II. — Sur la mesure des angles.

135. Étant données deux circonférences tangentes extérieurement ou intérieurement au point A, on mène par ce point deux sécantes quelconques, qui coupent l'une des circonférences aux points B, C et l'autre aux points B′, C′; démontrer que les droites BC, B′C′ sont parallèles.

136. Deux circonférences sont tangentes intérieurement au point A, et une corde BC de la grande circonférence est tangente à la petite au point D; démontrer qu'en menant les droites AB, AC, AD la droite AD est bissectrice de l'angle BAC.

137. Par l'un des points d'intersection A de deux circonférences on mène deux sécantes quelconques, qui coupent l'une des circonférences aux points B, C et l'autre aux points B′, C′; démontrer que les droites BC, B′C′ font entre elles un angle constant. (Ce théorème comprend celui de la question 135 comme cas particulier.)

138. Étant données deux circonférences qui se coupent aux points A, B, on mène par le point A une sécante quelconque CAD et l'on joint les points d'intersection C et D au point B; démontrer que l'angle CBD est constant.

139. Les bissectrices des angles formés par les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit sont perpendiculaires entre elles.

140. Étant donnés un triangle ABC et les hauteurs AD, BE, qui se coupent au point H, on prolonge AD jusqu'à la rencontre du cercle circonscrit à ABC en G; démontrer que les droites HD et DG sont égales.

141. Étant donnés un triangle ABC et le cercle circonscrit O, on joint le point O au point D milieu de l'arc BC et l'on joint AD; démontrer que l'angle ADO est égal à la demi-différence des angles B et C.

142. Les hauteurs d'un triangle sont les bissectrices des angles du triangle qui a pour sommets les pieds de ces hauteurs.

143. Étant donnés un triangle ABC et les centres O′, O″, O‴ des cercles exinscrits, tangents aux côtés BC, AC, AB; démontrer que les quatre triangles O′O″O‴, O″BC, O″AC, O‴AB sont équiangles entre eux; de plus, que chaque angle du triangle ABC a pour supplément le double de l'angle du triangle O′O″O‴ qui lui est opposé. (Soit O le centre du cercle inscrit, les quadrilatères OBO′C, OAO‴B sont inscriptibles; alors l'angle BCO′ = BOO′ = BO‴A, ...)

144. Si du point A, milieu d'un arc BAC, on mène deux droites quelconques ADE, AFG, qui coupent la corde BC et la circonférence aux points D, E, F, G, ces quatre points sont sur une circonférence.

145. Étant donné un quadrilatère inscriptible ABCD, on décrit quatre arcs AEFB, BFGC, CGHD, DHEA, qui se coupent deux à deux aux points E, F, G, H; démontrer que le quadrilatère EFGH est aussi inscriptible. (En prolongeant la corde DH au delà du point H, d'une longueur quelconque Hx, les angles EHx et GHx sont respectivement égaux aux angles EAD, GCD; de même, en prolongeant la corde BF, au delà du point F, d'une longueur quelconque Fy, etc.)

146. Si d'un point de la circonférence, circonscrite à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés du triangle, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite (droite de Simpson).

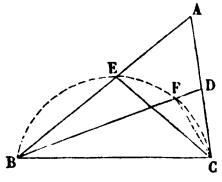
147. Étant donné un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle, on mène de l'un des sommets A une droite quel-

conque AM, qui rencontre l'arc BC au point M; démontrer que la droite AM est égale à la somme des droites BM et CM. Réciproquement, lorsqu'on a un triangle équilatéral ABC, si la distance d'un point M à l'un quelconque des sommets est égale à la somme de ses distances aux deux autres sommets, ce point est situé sur la circonférence circonscrite au triangle.

148. Trois circonférences O, O′, O″ se coupent en un même point A, et soient B, C, D les points d'intersection de la circonférence O avec la circonférence O′, de la circonférence O avec la circonférence O″, de la circonférence O′ avec la circonférence O″, puis joignons les points C, D à un point quelconque E de la circonférence O″, et supposons que la droite CE coupe la circonférence O au point F, que la droite DE coupe la circonférence O′ au point G : démontrer que les trois points F, B, G sont en ligne droite.

149. Si dans un triangle ABC (*fig.* 3) le côté AB est plus grand que le côté AC, la bissectrice BD de l'angle B sera plus grande que la bissectrice CE de l'angle C. Par le point C menons dans l'angle ECA la droite CF, faisant avec CE un angle ECF égal à l'angle ABD et rencontrant la bissectrice BD au point F; le quadrilatère EFCB sera inscriptible.

Fig. 3.



Décrivons l'arc BEFC. Alors l'arc BE est plus grand que l'arc FC, et, par conséquent, l'arc BEF est aussi plus grand que l'arc EFC; d'ailleurs l'arc BEF, qui est intercepté par l'angle BCF, égal à $\frac{C}{2} + \frac{B}{2}$, est moindre qu'une demi-circonférence, et il en est de même *a fortiori* de l'arc EFC; donc la corde BF est plus grande que la corde CE; donc on a $BD > CE$. (Rapprocher ce théorème des questions 32 et 34.)

Remarque. — Si les bissectrices de deux angles d'un triangle sont égales, les côtés opposés à ces angles sont égaux, et, par conséquent, le triangle est isoscèle.

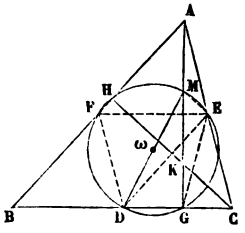
150. Sur deux côtés d'un triangle, comme diamètres, on décrit deux demi-circonférences; démontrer que ces demi-circonférences se coupent sur le troisième côté. Trois cir-

conférences, qui passent chacune par l'un des sommets d'un triangle et qui se coupent deux à deux sur les côtés du triangle, se rencontrent en un même point.

151. Sur les côtés d'un triangle quelconque ABC on construit extérieurement des triangles équilatéraux ABD, BCE, CAF et l'on mène les droites DC, EA, FB; démontrer que ces droites sont égales, qu'elles se coupent en un même point et que de ce point les trois côtés du triangle sont vus sous le même angle.

152. Dans tout triangle ABC (*fig.* 4) les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des droites qui joignent les sommets au point d'intersection des hauteurs sont situés sur une même circonférence. (Soient D, E, F les milieux des côtés BC, AC, AB, et menons la hauteur AG; je dis d'abord que la circonférence, passant par les points D, E, F, passera aussi par le pied G de la hauteur AG; car, dans le trapèze DGEF, les côtés FD et EG sont chacun la moitié de AC; donc ce trapèze est isoscèle, et, par suite, il est inscriptible (question 62).

Fig. 4.



Maintenant menons la hauteur CH, qui coupe AG au point K; soit M le milieu de AK, et joignons ME et ED. La droite ME sera parallèle à KC ou à HC et la droite ED sera parallèle à AB; donc l'angle MED est droit, et, comme l'angle MGD est aussi droit, le quadrilatère MEGD est inscriptible; donc la circonférence, qui passe par les points D, G, E, passe aussi par le point M. Ainsi le théorème est démontré.

Remarque. — La droite MD est un diamètre de la circonférence DGEMF et le milieu ω de MD en est le centre.

Le cercle ω est dit le *cercle des neuf points.*

153. Par un point donné, mener une droite qui coupe une circonférence donnée sous un angle donné. D'un point donné, comme centre, décrire une circonférence qui coupe une circonférence donnée, sous un angle donné.

154. Construire un triangle rectangle, connaissant l'hypoté-

nuse et la somme ou la différence des côtés de l'angle droit. Plus généralement, construire un triangle, connaissant un côté, l'angle opposé et la somme ou la différence des deux autres côtés. (Ces problèmes peuvent se résoudre en se fondant seulement sur le premier Livre.)

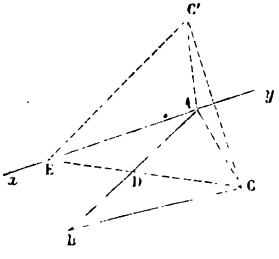
155. Construire un triangle, connaissant un angle, la hauteur et la médiane issues du sommet de cet angle.

156. Construire un triangle, connaissant les longueurs de la médiane, de la bissectrice et de la hauteur issues d'un même sommet. (Après avoir construit un triangle rectangle ayant la médiane pour hypoténuse et la hauteur pour un des côtés de l'angle droit, on cherchera à déterminer le centre du cercle circonscrit au triangle demandé, etc.)

157. Construire un triangle, connaissant les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets sur les côtés opposés.

158. Construire un triangle ABC (*fig.* 5), connaissant la base BC, la différence des angles à la base et sachant que le sommet A doit se trouver sur une droite donnée xy. (Supposons le problème résolu : sur AB prenons une longueur AD = AC et menons la droite CD qui rencontre xy en E; l'angle DCB est connu comme étant égal à $\frac{C-B}{2}$ (quest. 28), et il en est de même des angles ACD, ADC, qui sont égaux chacun à $\frac{C+B}{2}$. D'ailleurs, soit C′ le point symétrique de C, par rapport à xy, l'angle AC′E sera égal à son symétrique ACE, et, par suite, égal à l'angle ADC; donc le quadrilatère AC′ED est inscriptible et l'angle C′AD est le supplément de l'angle connu C′ED; donc, en décrivant sur la droite C′B un segment capable du supplément de l'angle C′ED, on aura le sommet A.)

Fig. 5.



159. Construire un triangle ABC, connaissant la base, la hauteur correspondante h et la différence des angles à la base B et C. (Le sommet A doit être situé sur la droite xy

parallèle à BC et distante de BC de la longueur h; ainsi ce problème n'est qu'un cas particulier du précédent.)

160. Circonscrire à un triangle donné ABC un second triangle DEF égal à un triangle donné. (On aura à se fonder sur la question 122.)

161. Inscrire dans un triangle donné ABC, dont les côtés sont donnés en grandeur et en position, un second triangle DEF égal à un triangle donné. (On circonscrira au triangle DEF un triangle A'B'C' égal au triangle ABC, et, au moyen de la figure obtenue, on construira facilement la figure cherchée.)

Remarque. — Ainsi, au lieu d'opérer d'abord sur le triangle ABC, on opère sur le triangle DEF, dont les côtés sont seulement donnés en grandeur. Cette manière d'opérer est dite *méthode par renversement.*

162. Étant donnés un cercle et un diamètre AB, par le point A on mène une corde quelconque AC, que l'on prolonge d'une longueur CM égale à CB; quel est le lieu des points M ainsi obtenus?

163. Par un point A situé hors d'un cercle, on mène une sécante quelconque ABC, et du milieu D de la corde BC on élève sur cette droite une perpendiculaire DM égale à AD; quel est le lieu des points M?

164. Quel est le lieu des centres des circonférences de même rayon qui coupent sous un angle donné une circonférence donnée?

165. Par un point D, pris sur le côté AC d'un triangle ABC, on mène une transversale quelconque qui coupe, par exemple, le côté BA prolongé au point E et le côté BC au point F, puis on décrit les circonférences EAD, DFC; quel est le lieu du second point d'intersection M?

166. Quel est le lieu décrit par le sommet d'un angle qui se meut dans son plan, de manière que ses côtés passent constamment par deux points donnés?

Observation. — Nous avons résolu ce problème dans la Note 15 de nos *Eléments* (théorème II, *Rem. II*), en nous fondant seulement sur le premier Livre.

Dans cette Note on donne le moyen de *décrire sur une droite donnée un segment capable d'un angle donné*, et l'on démontre la propriété fondamentale du *quadrilatère inscrit*.

Donc, en général, on pourrait résoudre à la fin du Livre I toutes les questions contenues dans ce paragraphe; mais il est plus simple de le faire en se fondant sur la mesure des angles. Le langage surtout y gagne d'une manière très-notable.

167. Étant donnés un cercle O, une corde AB et un point M pris sur l'arc AMB, sous-tendu par la corde, quelle doit être la position du point M pour que la somme MA + MB soit un maximum?

168. Étant donnés deux cercles O, O′ de rayons différents, trouver un point A tel, que les tangentes AB, AC, menées de ce point aux deux cercles, soient égales et forment entre elles un angle donné. (B et C étant les points de contact, si l'on mène les rayons BO et CO′ qui se rencontrent en D, le quadrilatère ABDC est inscriptible; donc l'angle ODO′ est connu et, par suite, dans le triangle DOO′ on connaît un côté, l'angle opposé et la différence des deux autres côtés, etc.)

CHAPITRE II.

§ I. — Sur la mesure des surfaces polygonales.

169. La somme de deux triangles, qui ont respectivement pour bases les diagonales d'un parallélogramme et pour sommet commun un point quelconque de son périmètre, est constante.

170. Étant donnés un parallélogramme ABCD et un point O non compris entre les côtés de l'angle DAB et de son opposé au sommet xAy, on mène les droites OA, OB, OC, OD; démontrer que le triangle OAC est équivalent à la somme des triangles OAB, OAD. Si le point O était compris entre les côtés de l'angle DAB ou entre les côtés de l'angle xAy, le triangle OAC serait égal à la différence des triangles OAB, OAD. (On remarquera que OA est une base commune aux trois triangles OAC, OAB, OAD, et l'on n'aura plus qu'à comparer les trois hauteurs correspondantes, etc.)

171. Étant donné un trapèze ABCD, on mène par le milieu E du côté CB une parallèle à DA, qui rencontre AB au point F et le prolongement de DC en G : démontrer que le trapèze est équivalent au parallélogramme AFGD; en déduire la mesure ordinaire du trapèze et en conclure aussi qu'*un trapèze a pour mesure le produit de l'un de ses côtés non parallèles par la perpendiculaire abaissée sur ce même côté du milieu du côté opposé.*

172. Les deux triangles, qui ont pour bases respectives les côtés non parallèles d'un trapèze et pour sommet commun le point d'intersection des diagonales, sont équivalents.

173. Le parallélogramme, qui a pour sommets les milieux

des côtés d'un quadrilatère, est équivalent à la moitié de ce quadrilatère. (Rapprocher ce théorème de la question 49.)

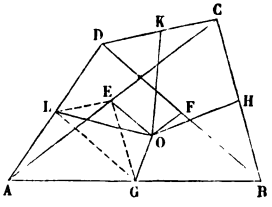
174. Deux quadrilatères sont équivalents lorsque leurs diagonales sont égales et qu'elles font entre elles des angles égaux.

175. On a un quadrilatère ABCD; par le point E, milieu de la diagonale DB, on mène une parallèle à la diagonale AC, qui rencontre AD au point F et DC au point G, puis on joint le sommet A au point G : démontrer que la droite AG divise le quadrilatère en deux parties équivalentes DAG et ABCG. (Menons par le sommet B une parallèle à AC, qui rencontre DC prolongé au point H; alors on voit que le point G est le milieu de DH. D'ailleurs, si l'on joint le sommet A au point H, le quadrilatère ABCG est équivalent au triangle AGH et, par suite, au triangle AGD; donc, etc.)

Remarque. — Si la droite, menée par le point E milieu de DB, rencontrait AB en F et BC en G, on mènerait par le sommet D une parallèle à AC qui rencontrerait BC prolongé au point H, etc.

176. Étant donné un quadrilatère ABCD (*fig.* 6), par le milieu E de la diagonale AC on mène une parallèle à la diagonale BD, et de même, par le point F, milieu de la diagonale BD, on mène une parallèle à AC, qui rencontre la première parallèle au point O, puis on joint ce point aux milieux G, H, K, L des côtés AB, BC, CD, DA : démontrer que ces quatre droites de jonction divisent le quadrilatère en quatre parties équivalentes. (Car les triangles OEG, OEL sont équivalents, et si on les retranche successivement du pentagone OELAG, il s'ensuit que les quadrilatères EGAL, OGAL sont équivalents. Or le quadrilatère EGAL se compose de deux triangles EAG, EAL, qui sont respectivement les quarts des triangles ABC, ADC, en vertu de la question 48, etc.).

Fig. 6.



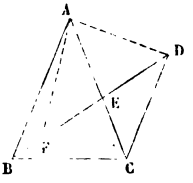
177. Des trois sommets d'un triangle ABC on mène aux côtés opposés les droites AD, BE, CF, qui se coupent en un

même point O; démontrer qu'on a les égalités

$$\frac{OD}{OA} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2.$$

178. Entre tous les triangles de même base et de même périmètre le maximum est le triangle isoscèle. (Soient un triangle isoscèle ABC (*fig.* 7), un second triangle DBC de même base BC et de même périmètre, et supposons que le côté DB coupe AC en E; il s'agit de démontrer que la surface du premier triangle est plus grande que celle du second.

Fig. 7.



Or ces deux triangles ont une partie commune EBC, et, par conséquent, la question revient à démontrer que le triangle AEB est plus grand que le triangle DEC; mais dans ces triangles les angles en E sont égaux et le côté EB est plus grand que le côté EC; donc il suffit de faire voir que EA est aussi plus grand que ED.

Pour cela, joignons AD, prenons sur le côté DB la longueur DF = AC et menons AF. Dans les triangles ADF, ADC le côté AD est commun et DF = AC; d'ailleurs, à cause du triangle AFB, on a AF > AB — BF, tandis que DC = AB — BF; donc l'angle ADF, opposé au côté AF, est plus grand que l'angle CAD opposé au côté DC, et, par suite, en considérant le triangle ADE, le côté EA est plus grand que le côté ED.)

Remarque. — Cette démonstration un peu longue a l'avantage de se fonder seulement sur le premier Livre.

Dans la Note 26 de nos *Éléments* nous avons démontré le même théorème, en faisant voir que la hauteur du triangle isoscèle ABC est plus grande que celle du triangle DBC.

179. Diviser un triangle en cinq parties équivalentes, en menant des droites de l'un des sommets sur le côté opposé; le diviser en deux parties qui soient entre elles comme 2 est à 3, en menant de l'un des sommets une droite sur le côté opposé.

180. Étant donnés un triangle ABC et un point D pris sur le côté AB, mener par ce point une droite qui divise le triangle en deux parties équivalentes. (On distinguera deux

cas, suivant que le triangle ADC est plus grand ou plus petit que le triangle DBC.

Dans le premier cas, on sera conduit à prolonger AD au delà du point D d'une longueur DE = AD; on joindra EC et, par le sommet B, on mènera une parallèle à EC qui rencontrera AC au point F et DF sera la droite demandée.

Dans le second cas, on sera conduit à prolonger DA au delà du point A d'une longueur AE = DA; on joindra EC et, par le sommet A, on mènera une parallèle à EC qui rencontrera BC au point F, et DF sera la droite cherchée.)

181. Par l'un des sommets D d'un quadrilatère ABCD mener une droite qui divise sa surface en deux parties équivalentes. (On construira le triangle DAE équivalent au quadrilatère et l'on divisera AE en deux parties égales au point F.

Si ce point tombe entre A et B, DF sera la droite demandée; mais, si le point F tombe entre B et E, il faudra mener par le point F une parallèle à BD, qui rencontrera BC au point G et DG sera la droite cherchée.)

Remarque. — La question 175 donne un moyen facile de mener par l'un des sommets d'un quadrilatère une droite qui divise sa surface en deux parties équivalentes.

§ II. — Sur les carrés construits sur la somme ou la différence de deux droites, etc.

182. Interpréter et démontrer géométriquement les égalités

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd,$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

en supposant que a, b, c, d représentent certaines droites, c'est-à-dire leurs mesures.

Remarque. — Il ne faut pas confondre des égalités de cette sorte avec celles qui expriment les propriétés de certaines figures. Par exemple, a, b, c désignant l'hypoténuse et les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, on sait qu'on a la relation

$$a^2 = b^2 + c^2;$$

or cette relation n'a lieu qu'en attribuant aux lettres a, b, c des valeurs

particulières, tandis que les égalités telles que

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

sont vérifiées pour des valeurs quelconques données aux lettres qu'elles contiennent.

En général, ces égalités ou ces transformations d'expressions, faciles d'après l'Arithmétique ou les premières notions d'Algèbre, s'établissent péniblement au moyen de la Géométrie.

Observation. — Euclide, il y a environ 2300 ans, a composé des éléments de Géométrie sans se fonder sur la science des nombres; aussi a-t-il été conduit à démontrer des égalités très-simples au moyen de théorèmes dont les énoncés sont très-compliqués.

Pour le faire voir nous pourrions énoncer les dix premiers théorèmes de son second Livre et les faire suivre des dix égalités résultant de ces théorèmes; mais nous nous bornerons à énoncer les trois premiers et nous y joindrons la démonstration du troisième, en conservant textuellement la traduction de F. Peyrard.

Nous croyons ainsi satisfaire à la curiosité de quelques élèves.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

Si l'on a deux droites, et si l'une d'elles est partagée en un certain nombre de parties, le rectangle compris sous ces deux droites est égal aux rectangles compris sous la droite qui n'a point été partagée et sous chacun des segments de l'autre.

Soient une droite a et une droite $b = c + d + e$; ce théorème revient à démontrer qu'on a

$$ab = ac + ad + ae.$$

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, le rectangle compris sous la droite totale et sous l'un et l'autre segment est égal au carré de la droite entière.

Soit la droite $a = b + c$; ce théorème revient à démontrer l'égalité $a(b + c) = a^2$.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments est égal au rectangle compris sous les segments et au carré formé sur le segment primitivement pris.

Soit la droite $a = b + c$; ce théorème revient à démontrer l'égalité $ab = bc + b^2$.

Que la droite AB soit partagée en un point quelconque C : je dis que le rectangle compris sous les droites AB, BC est égal au rectangle compris sous les droites AC, CB et au carré de la droite BC.

Sur la droite BC construisez le carré CDEB, prolongez en F la droite ED, et par le point A conduisez la droite AF parallèle à l'une ou à l'autre des droites CD, BE.

Le rectangle AE est certainement égal aux rectangles AD, CE; mais le rectangle AE est compris sous les droites AB, BC, car il est compris sous les droites AB, BE : donc la droite BE est égale à la droite BC; le rectangle AD est compris sous les droites AC, CB, puisque la droite DC est égale à la droite CB, et enfin le carré DB est construit sur la droite BC; donc le rectangle compris sous les droites AB, BC est égal au rectangle compris sous les droites AC, CB et au carré de la droite BC.

Donc, si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, le rectangle compris sous la droite totale et sous un des segments est égal au rectangle compris sous les segments et au carré construit sur le segment premièrement pris. C. Q. F. D.

Remarque. — On voit avec quel soin Euclide distingue l'énoncé général d'une proposition, l'énoncé particulier, la démonstration, la conclusion particulière et la conclusion générale.

QUESTIONS SUR LE LIVRE III.

CHAPITRE I.

§ I. — Sur les triangles semblables.

183. Dans deux triangles semblables, le rapport de deux hauteurs, ou de deux médianes, ou de deux bissectrices, partant de deux sommets homologues, est égal au rapport de similitude des deux triangles.

184. Deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont l'hypoténuse et un autre côté proportionnels.

185. En se fondant sur la similitude des triangles, démontrer que dans tout triangle les médianes se coupent en un même point.

186. Trouver la mesure d'un trapèze, considéré comme la différence des deux triangles, qu'on obtient en prolongeant jusqu'à leur rencontre les deux côtés non parallèles. (En désignant par B et b les bases du trapèze, par H et h les hauteurs correspondantes des deux triangles qu'on obtient, par h' la hauteur du trapèze, par S sa surface, on a d'abord

$$S = \tfrac{1}{2}(BH - bh),$$

et il s'agit d'éliminer H et h, ce qui se fait au moyen de la suite de rapports égaux

$$\frac{B}{H} = \frac{b}{h} = \frac{B - b}{h'},$$

d'où l'on tire

$$H = \frac{Bh'}{B - b} \quad \text{et} \quad h = \frac{bh'}{B - b}, \ldots$$

187. Deux triangles sont semblables lorsque leurs bases sont adjacentes à un angle égal et proportionnelles à la somme ou à la différence des deux autres côtés.

188. Si les trois côtés d'un triangle font respectivement, avec les trois côtés d'un autre triangle, des angles égaux, ces deux triangles sont semblables.

189. Par l'un des points d'intersection A de deux circonférences on mène trois sécantes, qui coupent l'une des circonférences aux points B, C, D, et l'autre aux points B′, C′, D′; démontrer que les triangles BCD et B′C′D′ sont semblables.

190. Dans tout triangle, le centre du cercle circonscrit, le point d'intersection des trois médianes et le point d'intersection des trois hauteurs sont en ligne droite; de plus, la distance des deux derniers points est double de la distance des deux premiers.

191. Déterminer sur une droite donnée AB un point C, de manière que l'on ait $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$ (m et n étant deux droites données).

192. Construire un triangle équilatéral dont les sommets soient situés respectivement sur trois parallèles données. (Même question, en remplaçant le triangle équilatéral par un triangle qui soit semblable à un triangle donné.)

193. Circonscrire à un triangle donné un triangle équilatéral dont la surface soit la plus grande possible. (*Voir* la question 122.)

194. Inscrire dans un triangle ABC un triangle DEF semblable à un triangle donné, ayant son sommet D sur BC et BD étant les $\frac{2}{5}$ de BC. (Voir *Rem.* sur les quest. 161 et 201.)

195. Inscrire dans un cercle un triangle dont les côtés soient parallèles à ceux d'un triangle donné.

196. Quel est le lieu des points dont les distances à deux droites données soient entre elles comme deux droites données m et n.

197. D'un point M, pris dans l'intérieur d'un angle yAx, on mène les droites MP, MQ, l'une perpendiculaire, l'autre parallèle à Ax, et l'on suppose que ces droites soient entre elles comme deux droites données m et n : quel est le lieu des points tels que M? Même question, en supposant que les droites MP et MQ soient respectivement parallèles à Ay et à Ax.)

198. Inscrire un carré dans un triangle donné.

199. Inscrire un carré dans un demi-cercle donné.

200. Inscrire dans un cercle un triangle ABC semblable à un triangle donné et dont le sommet A est donné.

201. Construire un triangle ABC, connaissant les hauteurs h, h', h'', abaissées respectivement sur les côtés BC, AC et AB. (En désignant ces côtés inconnus par a, b, c, on doit avoir

$$ah = bh' = ch'',$$

et, en divisant par hh', il vient

$$\frac{a}{h'} = \frac{b}{h} = \frac{c}{\frac{hh'}{h''}}.$$

Cela posé, on peut chercher une quatrième proportionnelle h''' aux trois droites h'', h, h' et l'on voit que les côtés a, b, c sont proportionnels aux trois droites h', h, h'''. Si donc on construit un triangle A'B'C', ayant ces trois droites pour côtés, de manière qu'on ait $B'C' = h'$, $A'C' = h$, $A'B' = h'''$, ce triangle sera semblable au triangle demandé, et, si du sommet A' on abaisse sur B'C' la perpendiculaire A'D', qu'on prenne sur A'D', à partir du point A', une longueur $A'D = h$ et que, par le point D, on mène une parallèle à B'C', coupant A'B' au point B et A'C' au point C, le triangle A'BC sera le triangle cherché.)

Remarque. — Pour résoudre ce problème, on commence par faire une figure semblable à la figure cherchée et l'on construit cette dernière

figure au moyen de la première. Cette manière d'opérer est dite *méthode par les figures semblables*. (Rapprocher cette remarque de celles qui suivent les questions 126 et 161.)

Observation. — Dans nos *Éléments de Géométrie*, à l'occasion d'une courte Notice sur Pythagore, nous avons cherché à faire ressortir l'extrême importance du théorème de Thalès : *Deux triangles équiangles entre eux ont leurs côtés homologues proportionnels*, et l'on peut remarquer, en effet, comment ce théorème intervient constamment dans les questions qui précèdent.

Legendre, à l'exemple d'Euclide, déduit ce théorème de cette proposition : *La ligne* DE, *menée parallèlement à la base d'un triangle* ABC, *divise les côtés* AB, AC *proportionnellement; de sorte qu'on a*

$$AD : DB :: AE : EC;$$

mais nous pensons que la marche inverse est de beaucoup préférable.

Aussi avons-nous tenu expressément à placer le théorème de Thalès en tête de notre troisième Livre; à mettre ainsi en relief ce *théorème fondamental* sur lequel reposent toutes les relations métriques, toute la géométrie du calcul.

§ II. — Sur les polygones semblables.

Observation. — Les six premières questions énoncées dans ce paragraphe sont résolues dans les Notes 31 et 33 de nos *Éléments*.

202. Lorsque deux polygones ABCDE, *abcde* sont semblables, si l'on joint les sommets du premier à un point quelconque O et les sommets du second au point homologue *o*, les triangles, ayant pour sommets ces deux points et pour bases les côtés des polygones, sont semblables chacun à chacun. (Deux points sont dits *homologues* lorsque, en les joignant aux extrémités de deux côtés homologues, on détermine deux triangles semblables et semblablement placés par rapport aux deux polygones.)

Remarque. — Les points O et *o* sont des *centres de similitude* des deux polygones, et les droites OA, OB, ... et *oa*, *ob*, ... se nomment *rayons vecteurs* ou *rayons de similitude*.

203. Le rapport des droites, qui joignent deux points homologues quelconques de deux polygones semblables, est égal au rapport de similitude de ces deux polygones. (Deux

droites sont dites *homologues* lorsque leurs extrémités sont respectivement des points homologues.)

204. Si d'un point quelconque S on mène aux sommets d'un polygone ABCD les droites SA, SB, SC, ... et qu'on prenne sur ces droites les points a, b, c, ... tels qu'on ait

$$\frac{SA}{Sa} = \frac{SB}{Sb} = \frac{SC}{Sc} = \ldots,$$

les polygones ABCD, *abcd* seront semblables. (Si l'on prend sur les prolongements des droites SA, SB, SC, ..., au delà du point S, les distances Sa, Sb, Sc, ..., de manière qu'on ait

$$\frac{SA}{Sa} = \frac{SB}{Sb} = \frac{SC}{Sc} = \ldots,$$

les polygones ABCD et *abcd* seront encore semblables.)

Remarque. — Selon que les sommets a, b, c, ... sont situés sur les droites SA, SB, SC, ..., ou sur leurs prolongements, au delà du point S, les polygones sont *semblables et semblablement placés,* ou bien *semblables et inversement placés.*

Pour abréger, M. Chasles a donné à cette similitude de forme et de position le nom d'*homothétie directe* dans le premier cas et celui d'*homothétie inverse* dans le second.

Le point S est un *centre d'homothétie* des deux polygones ABCD, *ab'cd* et, en désignant par k le rapport $\frac{SA}{Sa}$, k est le *rapport d'homothétie* du premier polygone au second, et, par conséquent, $\frac{1}{k}$ ou k' est le *rapport d'homothétie* du second au premier.

Plus généralement : Si d'un point S on mène à différents points A, B, C, ..., disposés d'une manière quelconque, les droites SA, SB, SC, ..., et qu'on prenne sur ces droites ou sur leurs prolongements, au delà du point S, des points a, b, c, ..., tels qu'on ait

$$\frac{SA}{Sa} = \frac{SB}{Sb} = \frac{SC}{Sc} = \ldots = k,$$

les deux systèmes de points sont dits *homothétiques directs* ou *homothétiques inverses,* suivant que les points A et a, B et b, C et c, ... sont d'un même côté du point S ou de part et d'autre de ce point.

Selon que les points A, B, C, ... du premier système sont isolés ou qu'ils forment des lignes continues, il en sera de même évidemment des points a, b, c, ...

205. La figure homothétique directe ou inverse d'une ligne droite est une seconde ligne droite parallèle à la première. (Cette question comprend, comme cas particulier, la première partie de la question 50.)

206. Les lignes homothétiques d'une circonférence sont des circonférences. (*Voir* aussi la seconde partie de la question 50.)

207. Deux circonférences quelconques O, *o* sont homothétiques directes et homothétiques inverses.

Remarque. — Les tangentes communes extérieures de deux cercles O, *o* coupent la ligne des centres en un point S, qui est le centre d'homothétie directe des deux cercles, et leurs tangentes communes intérieures coupent la ligne des centres en un point S', qui est le centre d'homothétie inverse des deux cercles.

Lorsque deux cercles se touchent *extérieurement*, leur point de contact est leur centre de similitude *inverse*, et, s'ils se touchent *intérieurement*, leur point de contact est leur centre de similitude *directe*. Les centres de similitude de deux cercles *concentriques* se confondent avec le centre commun à ces cercles. (Rapprocher la seconde partie de cette remarque de la question 135.)

208. Quel est le lieu des points de rencontre des médianes des triangles qui ont le point O pour sommet commun et dont les deux autres sommets sont situés sur deux parallèles données xy, $x'y'$?

209. Lieu des points de rencontre des médianes des triangles inscrits dans un segment du cercle donné (c'est-à-dire ayant pour base la corde du segment et pour sommet un point de l'arc de ce segment).

210. On a un cercle et deux points A et B dans son plan; par le point A on mène une droite quelconque qui coupe la circonférence au point C, et l'on prolonge AC d'une longueur CD = AC, puis on joint le point C au point B et le point D au point E, milieu de AB, et les droites CB, DE se coupent en M : quel est le lieu des points M?

Remarque. — Ce lieu est indépendant de la position du point A.

211. Quel est le lieu des points M tels, que la distance MD de chacun d'eux à la base BC d'un triangle isoscèle ABC soit

moyenne proportionnelle entre ses distances ME, MF, aux deux autres côtés AC, AB? (D'abord les angles DME et DMF sont égaux; d'ailleurs l'égalité $\overline{MD}^2 = ME \times MF$ donne

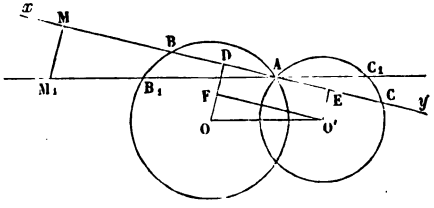
$$\frac{MD}{ME} = \frac{MF}{MD};$$

donc les triangles DME et DMF sont semblables.

De plus, chacun de ces triangles est semblable au triangle BMC; donc, etc.)

212. Étant donnés deux cercles qui se coupent, par l'un des points d'intersection A (*fig.* 8), on mène une sécante quel-

Fig. 8.



conque xy, sur laquelle on porte une longueur AM égale à la somme des cordes AB, AC; quel est le lieu du point M? (Supposons d'abord que la sécante menée par le point A soit parallèle à OO' et qu'elle rencontre la circonférence O au point B_1 et la circonférence O' au point C_1, la somme des cordes AB_1, AC_1 sera le double de la distance OO', et, par conséquent, si l'on porte sur AB_1 une longueur $AM_1 = 2OO'$, le point M_1 sera un point du lieu cherché.

Ensuite, soit une sécante quelconque xy passant par le point A et coupant les circonférences aux points B et C, menons les rayons OD, O'E respectivement perpendiculaires aux cordes AB, AC, et la droite O'F parallèle à xy, qui rencontre OD en F, la droite O'F sera égale à la demi-somme des cordes AB, AC, et si l'on porte sur AB une longueur $AM = 2O'F$, le point M sera un second point du lieu.

Mais les triangles MM_1A et FOO' sont semblables, et, par suite, l'angle M_1MA est droit, etc.)

213. Dans tout triangle ABC, la distance du centre O du

cercle circonscrit, à l'un des côtés BC, par exemple, est la moitié de la droite qui joint le sommet opposé A au point de rencontre H des trois hauteurs. (Car, en menant par chaque sommet du triangle ABC une parallèle au côté opposé, on forme un second triangle semblable au premier, et le rapport de similitude de ce second triangle au premier est 2. D'ailleurs H est le centre du cercle circonscrit au second triangle, etc.).

CHAPITRE II.

§ I. — Sur les droites proportionnelles.

214. Si une transversale DE coupe les trois côtés d'un triangle ABC, considérés comme indéfinis (par exemple, le côté AB en D, le côté BC prolongé en E, le côté AC en F), elle détermine sur ces côtés six segments tels, que le produit de trois segments non consécutifs AD, BE, CF est égal au produit des trois autres DB, EC, FA, en sorte qu'on a

$$(1) \qquad AD.BE.CF = DB.EC.FA.$$

(On mènera la droite CG parallèle à AB, qui rencontre la transversale au point G, et l'on considérera les triangles semblables ADF, CGF, ainsi que les triangles semblables CGE, BDE, etc.

Remarque I. — De l'égalité (1) on tire

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{AD}{DB} &= \frac{FA}{CF} \cdot \frac{EC}{BC + CE} \\ &= \frac{FA}{CF} \cdot \frac{1}{\frac{BC}{CE} + 1}. \end{aligned} \right.$$

Alors, en supposant que la transversale DE tourne autour du point D, jusqu'à ce qu'elle coïncide avec la droite indéfinie DF'x que l'on conçoit menée par le point D parallèlement à BC et coupant AC au point F', on voit que le segment CE augmente indéfiniment et que la fraction $\frac{BC}{CE}$ diminue de plus en plus, en tendant vers la limite zéro; donc, à la limite, l'égalité (2) devient

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF'}{F'C}.$$

Ainsi le premier théorème relatif aux droites proportionnelles n'est qu'une conséquence du théorème ci-dessus.

Remarque II. — L'égalité (1) se met assez souvent sous la forme

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1;$$

d'où il résulte que le produit des rapports du premier segment au second, du troisième segment au quatrième, du cinquième au sixième est égal à 1.

Remarque III. — La figure formée par le triangle ABC et la transversale DFE ou par les quatre droites AB, AC, BC, DE, qui se coupent deux à deux, est appelée *quadrilatère complet.*

Pour passer d'un quadrilatère convexe ABCD à un quadrilatère complet, il suffit de prolonger les côtés opposés AB, CD jusqu'à leur rencontre en E, et les côtés BC, AD jusqu'à leur rencontre en F. Les droites AC, BD, EF sont les diagonales du quadrilatère complet ABCDEF.

215. Étant donnés une droite indéfinie xy et deux points A et B sur cette droite, déterminer sur xy deux autres points C et D tels, que les distances de chacun d'eux aux points A et B soient entre elles dans un rapport donné. (Pour fixer les idées, soit $m > n$, et menons par le point A une droite $AM = m$, et par le point B une droite NN′ parallèle à AM, et de manière qu'on ait $NB = BN' = n$; la droite MN′ coupera xy en un point C, compris entre A et B, et la droite MN coupera xy au point D sur le prolongement de AB et les points C et D seront les points cherchés.)

Remarque. — Les points C et D sont dits *conjugués harmoniques* par rapport à la droite AB ou par rapport aux points A et B.

On dit aussi que les quatre points A, B, C, D sont *harmoniques* ou qu'ils forment un *système harmonique,* et que la droite AB est divisée *harmoniquement* par les deux points C et D.

Si d'un point quelconque S on mène des droites SA, SB, SC, SD à quatre points harmoniques A, B, C, D, ces droites forment un *faisceau harmonique.* Les deux droites SC, SD, qui passent par deux points conjugués harmoniques, sont appelées *conjuguées harmoniques.* (En général, on appelle *faisceau* un système de droites quelconques SA, SB, SC, ... qui passent par un même point S. Ce point est le *centre* du faisceau et les droites SA, SB, SC, ... en sont les rayons.)

216. Si une droite EF, parallèle aux bases AB et DC d'un trapèze, divise les deux autres côtés dans le rapport de m à n, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{DE}{EA} = \frac{CF}{FB} = \frac{m}{n},$$

on aura

$$EF = \frac{m.AB + n.CD}{m + n}.$$

(On mènera la diagonale DB qui coupe EF au point G, etc.)

217. Si deux parallèles AB, *ab* sont divisées en parties proportionnelles par différentes droites A*a*, C*c*, D*d*, B*b*, ces droites concourent en un même point.

Remarque. — Cette question donne un moyen de mener par un point donné C une droite C*c* qui concoure au même point que les droites A*a* et D*d* qu'on ne peut prolonger.

218. Si deux droites AB, CD se coupent en un point E, situé entre A et B, et que les deux parties de la droite AB soient inversement proportionnelles à celles de la droite CD, les quatre points A, B, C, D sont sur une même circonférence. De même, lorsque deux droites AB, CD prolongées se coupent en un point E, si les distances EA, EB sont inversement proportionnelles aux distances EC, ED, le quadrilatère ABCD est inscriptible. Enfin, si une droite EA, prise sur le côté d'un angle, est moyenne proportionnelle entre les droites EC, ED, prises sur l'autre côté de l'angle, la circonférence passant par les points A, C, D sera tangente à la droite EA.

219. Si d'un point D, pris sur une droite BC, entre ses extrémités B et C, on élève sur BC une perpendiculaire DA telle, qu'on ait

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD,$$

le triangle ABC sera rectangle en A. Le triangle ABC sera encore rectangle en A, si l'on a

$$\overline{AD}^2 = BD \times DC.$$

220. Étant donné un triangle ABC, on diminue le côté AB d'une longueur arbitraire AA′ et l'on augmente le côté BC d'une longueur CC′ = AA′; démontrer que la droite A′C′ est divisée par le côté AC dans le rapport inverse des côtés AB, BC.

221. Démontrer que les perpendiculaires, abaissées d'un point quelconque de l'une des diagonales d'un parallélo-

gramme sur deux côtés adjacents, sont inversement proportionnelles à ces côtés.

222. Par le sommet A d'un parallélogramme ABCD on mène une transversale qui coupe, aux points E et F, les côtés CB, CD prolongés : démontrer que le produit $BE \times DF$ est constant.

223. Si, par un point E, pris sur la diagonale AC d'un parallélogramme ABCD, on mène une transversale qui coupe les côtés AB, BC en F et G, les côtés AD, DC en F′ et G′, on aura

$$EF.EG = EF'.EG'.$$

224. Dans un triangle on mène des parallèles à la base et les diagonales des trapèzes ainsi formés : quel est le lieu des points d'intersection de ces diagonales?

225. Étant donnés trois points A, B, C, mener par le point A une droite, de manière que les distances des points B et C à cette droite soient entre elles dans un rapport donné $\frac{m}{n}$. De plus, étant donnés deux triangles et un point, mener par ce point une droite xy, de manière que les sommes respectives des distances des sommets des deux triangles à xy soient entre elles dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

226. Par un point P pris sur le plan d'un cercle O on trace une sécante quelconque PAB, qui coupe la circonférence aux points A et B, et par ces points on mène des tangentes qui se coupent en M; quel est le lieu des points M? (*Voir* à la fin de ce Recueil la Note I, problème I.)

227. Lorsque des circonférences O, O′, O″, O‴, ... ont une corde commune AB, si du point A on mène une transversale quelconque, qui coupe ces circonférences aux points C, D, E, F, on aura

$$\frac{CD}{OO'} = \frac{DE}{O'O''} = \frac{EF}{O''O'''} = \ldots.$$

(Du point M, milieu de la corde AB, élevons sur cette droite une perpendiculaire, menons les rayons AO, AO′, AO″, AO‴, ...

et les droites BC, BD, BE, BF, ...; les triangles CBD, AOO′ seront semblables, ainsi que les triangles DBE, AO′O″, etc.)

Remarque. — Si la corde AB devient nulle et se réduit au seul point M, ce point est un centre de similitude, et les droites CD, DE, EF, ... sont encore proportionnelles aux droites OO′, O′O″, O″O‴, ...

228. On a deux circonférences O, O′, tangentes intérieurement au point A, et, d'un point quelconque P de la circonférence extérieure, on mène une tangente PM à la circonférence intérieure O′; démontrer que le rapport $\frac{PM}{PA}$ est constant. (En désignant par N le point d'intersection de la droite PA avec la circonférence O′, on a d'abord

$$\overline{PM}^2 = PA.PN;$$

d'ailleurs, le point de contact A étant un centre de similitude des cercles O, O′, on a

$$\frac{AP}{R} = \frac{AN}{r} = \frac{PN}{R-r},$$

en désignant les rayons des cercles par R et r, etc.)

Remarque. — Étant donnés deux cercles tangents extérieurement, si d'un point quelconque P de la circonférence O, par exemple, on mène une tangente PM au cercle O′, on aura encore

$$\frac{PM}{PA} = \text{const.}$$

229. Étant donnés deux cercles O, O′, qui se coupent aux points A et B, d'un point quelconque P de l'une des circonférences, O par exemple, on mène une tangente PM à l'autre O′; démontrer que l'on a

$$\frac{\overline{PM}^2}{PA.PB} = \text{const.}$$

(En désignant par N le point où la droite PA coupe la circonférence O′, on a d'abord

$$\overline{PM}^2 = PA.PN;$$

d'ailleurs les triangles PBN et AOO′ sont semblables, ce qui donne

$$\frac{PN}{OO'} = \frac{PB}{OA}, \text{ etc.})$$

230. Soient AB le diamètre d'un cercle, la droite AC perpendiculaire à AB, et supposons que d'un point quelconque C de cette perpendiculaire on mène au cercle une tangente CD; la perpendiculaire abaissée du point de contact D sur AB sera divisée par la droite CB, au point F, en deux parties égales. (Au point B on mènera une tangente qui rencontrera CD en G, etc.)

231. Soient AA′S une tangente commune à deux circonférences, A, A′ les points de contact, S le point où cette tangente rencontre la ligne des centres, et supposons que du centre de similitude S on mène une sécante quelconque qui rencontre la circonférence O aux points B, C et la circonférence O′ aux points B′, C′, on aura

$$SA.SA' = SB.SC' = SC.SB'$$

(car les quadrilatères AA′C′B et AA′B′C sont inscriptibles.)

232. Étant donnés une droite xy et un point S, on mène de ce point à xy une droite quelconque SA qu'on divise au point A′, de manière qu'on ait SA.SA′ égal à un carré donné m^2; quel est le lieu des points A′?

Remarque. — La ligne donnée xy et le lieu cherché sont deux *figures inverses* l'une de l'autre.

233. Étant donnés une circonférence et un point S sur cette ligne, on mène par le point S une sécante quelconque qui rencontre la circonférence au point A, on prend sur SA une longueur SA′, de manière que le produit SA.SA′ soit égal à un carré donné; quel est le lieu des points A′ ainsi obtenus?

234. Lorsque deux circonférences égales O et O′ se coupent, la droite AB, qui joint l'un des points d'intersection A à l'extrémité du rayon OB, dirigé suivant OO′, est moyenne proportionnelle entre ce rayon et la portion CB de la droite OO′ comprise entre les deux circonférences (car l'angle ABO est

un angle à la base dans chacun des triangles isoscèles AOB, ACB et, par suite, ces triangles sont semblables, etc).

Remarque. — De là une nouvelle manière de trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites données a, b.

On prendra $OB = a$ et $BC = b$, on prolongera OB d'une longueur $BO' = OC$ et des points O et O′ comme centres, avec un rayon égal à OB, on décrira deux arcs de cercles qui se couperont en A; alors AB sera la moyenne proportionnelle cherchée.

235. Si du sommet B d'un triangle ABC on mène une droite qui rencontre le côté AC ou son prolongement Ax au point D et telle que l'angle CBD soit égal à l'angle CAB, le côté BC sera moyen proportionnel entre CA et CD.

236. Si d'un point on mène deux tangentes à une circonférence et qu'on joigne les points de contact par une droite, la distance d'un point quelconque de la circonférence à cette droite sera moyenne proportionnelle entre les distances du même point aux deux tangentes.

237. On a un triangle ABC inscrit dans une demi-circonférence, du point D pris sur l'hypoténuse BC on élève une perpendiculaire qui coupe le côté AB, la demi-circonférence BAC et le côté AC prolongé aux points E, F, G : démontrer que la droite DF est moyenne proportionnelle entre DE et DG.

238. Étant donné un triangle isoscèle ABC inscrit dans un cercle, on mène par son sommet A une droite qui coupe la circonférence et la base BC aux points D et E : démontrer que le côté AB est moyen proportionnel entre les distances AD et AE.

239. Étant donnés deux cercles tangents extérieurement, démontrer que la portion de la tangente commune extérieure, comprise entre ses deux points de contact, est moyenne proportionnelle entre les diamètres des deux cercles.

240. La distance d'un point d'une circonférence à une corde quelconque est moyenne proportionnelle entre les distances du même point aux tangentes menées par les extrémités de cette corde.

241. Si une droite est tangente à un cercle en un point M

et qu'on mène par les extrémités d'un diamètre quelconque AB deux autres tangentes qui coupent la première aux points C et D, le rayon du cercle sera moyen proportionnel entre les segments CM et MD.

242. Si des extrémités d'un diamètre on mène différentes cordes à la circonférence, les carrés de ces cordes sont proportionnels aux projections de ces mêmes cordes sur le diamètre.

243. Par un point pris dans le plan d'un angle mener une droite qui soit divisée dans un rapport donné par ce point et les côtés de l'angle, prolongés au delà du sommet, s'il est nécessaire.

244. Par un point pris dans le plan d'un angle mener une droite qui soit divisée par ce point et les côtés de l'angle en deux segments dont le produit soit égal à un carré donné.

245. Étant donnés deux parallèles xy, $x'y'$ et deux points A, B, mener par ces points deux autres parallèles, formant avec les premières un parallélogramme dont les côtés soient proportionnels à deux longueurs données m et n. (Déterminer d'abord la distance des deux parallèles demandées, etc.)

246. Étant donné un triangle ABC, mener dans son plan une droite xy telle, que les distances des sommets A, B, C à cette droite soient proportionnelles aux longueurs données m, n, p.

§ II. — Sur les relations entre les côtés et divers autres éléments d'un triangle ou d'un quadrilatère.

Observation. — Les questions contenues dans ce paragraphe étant assez nombreuses, nous croyons utile de les diviser en quatre sections :

La première comprendra des questions se rapportant aux relations entre les côtés d'un triangle et la projection de l'un de ces côtés sur un autre.

La deuxième comprendra des questions se rapportant aux relations entre les côtés d'un triangle et une médiane, ou entre les côtés d'un triangle et la projection d'une médiane sur le côté qui lui correspond.

La troisième comprendra des questions où il s'agira de bissectrices ou de rayons.

La quatrième comprendra des questions se rapportant aux quadrilatères.

PREMIÈRE SECTION.

247. Étant donné un triangle quelconque ABC, la projection AD du côté AB sur AC et la projection AE du côté AC sur AB, démontrer l'égalité

$$AB.AE = AC.AD.$$

248. Démontrer directement, c'est-à-dire sans se fonder sur le théorème de Pythagore, que le carré fait sur le côté d'un triangle, opposé à un angle aigu, est équivalent à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés, moins deux fois le rectangle construit sur l'un des côtés qui comprennent l'angle aigu et la projection de l'autre côté de cet angle sur le premier.

Remarque. — Désormais nous représenterons souvent par a, b, c les côtés d'un triangle ABC, opposés aux angles A, B, C.

D'après cette convention, si dans le triangle ABC l'angle A est aigu et qu'on désigne par p la projection de AC sur AB, on déduira du théorème précédent la relation

$$(1) \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times p.$$

Observation. — Cette relation a lieu tant que l'angle A est aigu.

Maintenant, supposons que la position du côté AB reste fixe, que le côté AC tourne autour du point A de manière que l'angle BAC augmente et que l'angle BAC devienne égal à un angle droit, la projection p sera nulle et la relation (1) se réduira à celle-ci :

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

d'où l'on conclut le théorème de Pythagore.

En second lieu, supposons que l'angle BAC devienne obtus; alors, en conservant les notations ci-dessus, on démontrerait qu'on a

$$(2) \qquad a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times p.$$

Mais, si l'on convient de regarder la projection p comme positive, lorsqu'elle est située sur le côté AB et de la regarder comme négative lorsqu'elle est située sur le prolongement de AB, au delà du point A, la relation (2) pourra s'écrire de cette manière :

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times (-p) \quad \text{ou} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times p.$$

Ainsi la relation (1) a lieu lorsque l'angle A est aigu, droit ou obtus, et l'on peut dire que *dans tout triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, moins deux fois le produit de l'un de ces derniers côtés et de la projection du second côté sur le premier.*

En général, si une relation a été établie au moyen d'une certaine figure, en y regardant toutes les droites comme positives, et qu'on fasse varier la figure d'une manière continue, la relation existera toujours; seulement, si des droites, prises à partir d'un point fixe ou d'une droite fixe dans une direction déterminée, prennent une direction opposée après avoir passé par la valeur zéro, il faudra regarder ces droites comme étant négatives. C'est en cela que consiste la *loi des signes de Carnot.*

Cette loi, à la vérité, n'est pas démontrée *a priori;* mais elle résulte de nombreuses applications, de puissantes inductions.

Par exemple, considérons la question 65, relative à un triangle isocèle ABC et qui se compose de deux parties.

D'après la première partie, la somme des distances DE, DF d'un point quelconque D de la base aux deux autres côtés AB, AC est égale à la hauteur h issue du point B, et l'on a

$$(3) \qquad DE + DF = h.$$

D'après la seconde partie, le point D est situé sur le prolongement de BC, au delà du point C, par exemple, et l'on a

$$(4) \qquad DE - DF = h.$$

Or, après avoir démontré la relation (3), si l'on suppose que le point D se meuve sur BC, dans la direction BCx, on voit que la perpendiculaire DF, restant parallèle à elle-même, devient nulle lorsque le point D se confond avec le sommet C et qu'elle change de position par rapport au côté AC, lorsque le point D se trouve sur le prolongement Cx; alors, d'après la loi des signes, la perpendiculaire DF doit être regardée comme négative, si l'on veut que la relation (3) convienne à la fois aux deux parties de la question. Et, en effet, si dans la relation (3) on remplace DF par — DF, on retrouve la relation (4).

249. Dans un triangle ABC, si l'angle A = 60°, on aura

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc,$$

et, si l'angle A = 30°, on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{3}.$$

Remarque. — Si l'angle A était égal à 120 ou à 150 degrés, on aurait

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc \quad \text{ou} \quad a^2 = b^2 + c^2 + bc\sqrt{3}.$$

250. Sur les côtés AB, AC d'un triangle ABC on construit deux parallélogrammes quelconques ABDE, ACFG, dont les côtés DE, FG se rencontrent au point H et l'on mène la droite HA, puis on construit le parallélogramme BCKL, dont le côté BL est égal et parallèle à HA : démontrer que ce troisième parallélogramme est équivalent à la somme des deux autres. Déduire de là le problème de Pythagore.

251. Une droite étant prise pour unité, trouver des droites qui aient respectivement pour mesures les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ... (On construira d'abord un triangle rectangle isoscèle ABC dont les côtés de l'angle droit AB, AC soient égaux chacun à l'unité de longueur, et l'on aura

$$\overline{BC}^2 = 2, \quad \text{d'où} \quad BC = \sqrt{2};$$

puis, du point C on élèvera sur BC une perpendiculaire CD égale à l'unité de longueur, et, en joignant BD, on aura

$$\overline{BD}^2 = 3, \quad \text{d'où} \quad BD = \sqrt{3},$$

et ainsi de suite.

Remarque. — Au lieu d'obtenir successivement des droites égales à $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., il est facile de construire directement une droite égale à $\sqrt{6}$, par exemple. Pour cela, il suffit de chercher une moyenne proportionnelle entre deux droites respectivement égales à 2 et à 3.

On aurait une droite égale à $\sqrt{5}$, par exemple, en cherchant une moyenne proportionnelle entre l'unité de longueur et une droite égale à 5.

252. Étant donné un triangle ABC, rectangle en A, sur les côtés AB, AC, on construit deux carrés ABDE, ACFG; démontrer : 1° que les trois points D, A, F sont en ligne droite; 2° que la circonférence décrite sur BC, comme diamètre, passe par le milieu de la droite DF; 3° qu'en désignant par h la hauteur issue du sommet A, on a la relation

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

253. On a un triangle ABC, rectangle en A, et du point D,

milieu de AB, on abaisse une perpendiculaire DE sur l'hypoténuse : démontrer qu'on a

$$\overline{EC}^2 - \overline{EB}^2 = \overline{AC}^2.$$

254. Étant donné un triangle rectangle, on abaisse, du sommet de l'angle droit, une perpendiculaire sur l'hypoténuse : démontrer que les rayons des cercles inscrits dans les trois triangles ainsi déterminés sont les côtés d'un triangle rectangle semblable aux trois premiers.

255. On a un triangle isoscèle ABC et la hauteur CD, issue de l'extrémité C de la base : démontrer que la somme des carrés des côtés du triangle ABC est égale à

$$\overline{BD}^2 + 2\overline{DA}^2 + 3\overline{CD}^2.$$

256. Soient un triangle isoscèle ABC et DE parallèle à la base BC : démontrer qu'on a

$$\overline{BE}^2 = \overline{EC}^2 + BC.DE.$$

257. Si d'un point, pris dans l'intérieur d'un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, on détermine sur ces côtés six segments tels, que la somme des carrés de trois segments, n'ayant pas d'extrémité commune, est égale à la somme des carrés des trois autres. — Extension à un polygone quelconque.

258. Soient un triangle ABC, un point quelconque P pris dans son plan, O le point d'intersection des médianes et joignons PA, PB, PC, OA, OB, OC : démontrer la relation

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + 3\overline{PO}^2.$$

(Pour fixer les idées, supposons que la droite PO laisse d'un côté le sommet A et de l'autre les sommets B, C, et que la droite xy perpendiculaire à PO, au point O, laisse d'un côté les points P, A, C et de l'autre le point B, puis projetons sur PO les sommets A, B, C en A′, B′, C′, les triangles PAO, PBO,

PCO donneront

$$\overline{PA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{PO}^2 - 2PO.OA',$$
$$\overline{PB}^2 = \overline{OB} + \overline{PO}^2 + 2PO.OB',$$
$$\overline{PC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{PO}^2 - 2PO.OC'.$$

Ajoutant, il vient

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + 3\overline{PO}^2 + 2PO(OB' - OA' - OC');$$

or le point O est le centre des moyennes distances des sommets A, B, C, et, par conséquent, la somme algébrique des distances de ces sommets à l'axe xy est nulle, et il en est de même de la somme algébrique des distances des points A', B', C' à l'axe xy; donc on a

$$OB' - OA' - OC' = 0;$$

donc, etc.)

259. Quel est le lieu des points tels, que la somme des carrés de leurs distances aux trois sommets d'un triangle ABC soit égale à un carré donné m^2?

260. Si dans un cercle deux cordes sont perpendiculaires, la somme des carrés des segments formés par ces cordes sera constante. Il en sera de même de la somme des carrés des deux cordes.

261. Étant donnés deux cercles tangents au point M, on mène par ce point la ligne des centres et deux sécantes rectangulaires, et soient A et A', B et B', C et C' les points d'intersection de ces trois droites avec les circonférences : démontrer qu'on a

$$\overline{AA'}^2 = \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2.$$

262. On a une demi-circonférence et un point C pris sur le diamètre AB; puis de ce point on élève sur AB une perpendiculaire jusqu'à la rencontre de la demi-circonférence au point D et l'on joint le point C au point E, milieu de la demi-circonférence : démontrer qu'on a

$$\overline{CE}^2 + \overline{CD}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{2}.$$

263. Trouver la surface S d'un triangle ABC, en fonction de ses hauteurs h, h', h''.

(Les relations $ah = bh' = ch'' = 2S$ donnent

$$a = \frac{2S}{h}, \quad b = \frac{2S}{h'}, \quad c = \frac{2S}{h''};$$

alors il est facile d'avoir les valeurs du demi-périmètre p et des différences $p - a$, $p - b$, $p - c$, et, si l'on porte ces valeurs dans la formule connue

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

on trouve

$$S = \frac{h^2 h'^2 h''^2}{\sqrt{(hh'+hh''+h'h'')(hh'+hh''-h'h'')(hh'+h'h''-hh'')(hh''+h'h''-hh')}}.$$

264. Trouver la surface S d'un triangle ABC, en fonction de ses médianes m, m', m''. (Supposons que m, m', m'' représentent les médianes AD, BE, CF, qui se coupent au point O, prolongeons BE d'une longueur OG = OE et joignons GC et GA; les trois côtés CG, OG, OC du triangle OCG ont respectivement pour valeurs $\frac{2}{3}m$, $\frac{2}{3}m'$, $\frac{2}{3}m''$ et, par conséquent, il est facile d'avoir la surface S' de ce triangle en fonction de m, m', m''.

D'ailleurs les triangles OCG et OAC sont équivalents, comme étant chacun la moitié du parallélogramme OCGA, et le triangle OAC est le tiers du triangle ABC; donc, en multipliant S' par 3, on aura la valeur de S cherchée, qui est

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{(m+m'+m'')(m'+m''-m)(m+m'''-m')(m+m'-m''')}.$$

DEUXIÈME SECTION.

265. Dans tout triangle ABC, la différence des carrés de deux côtés AB, AC est égale à deux fois le produit du troisième côté BC par la projection DE de la médiane correspondante AD sur la direction de ce même côté.

266. Étant donné un triangle ABC, on mène du sommet A au côté BC la droite AD qui divise BC en deux parties BD, DC,

qui sont entre elles comme m est à n; démontrer qu'on a la relation

$$n.\overline{AB}^2 + m.\overline{AC}^2 = (m+n).\overline{AD}^2 + n.\overline{BD}^2 + m.\overline{DC}^2.$$

(Que devient la relation, si le point D est situé sur le prolongement de BC et si l'on a toujours $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$?)

267. Deux circonférences concentriques étant données, la somme des carrés des distances d'un point quelconque de l'une de ces circonférences aux extrémités d'un diamètre de l'autre est constante.

268. Si l'hypoténuse BC d'un triangle rectangle ABC est divisée en trois parties égales BD, DE, EC, la somme des carrés des côtés du triangle ADE est égale aux $\frac{2}{3}$ du carré de BC.

269. Soit O le centre d'une circonférence; on prend sur un diamètre deux longueurs OA, OB, égales entre elles; par le point B on mène une corde quelconque CD et l'on joint les points C et D au point A; démontrer que la somme

$$\overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2$$

est constante.

270. Soient AB le diamètre d'un cercle O, une corde CD, parallèle à AB et un point quelconque E pris sur AB; démontrer qu'on a

$$\overline{EC}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2.$$

271. Trouver le lieu des points tels, que la somme des carrés de leurs distances à deux points fixes A et B soit égale à un carré donné.

272. Trouver le lieu des points tels, que la différence des carrés de leurs distances à deux points fixes A et B soit égale à un carré donné m^2.

Remarque. — Ces deux dernières questions sont résolues dans la Note 40 de nos *Éléments*.

273. Étant données deux circonférences, trouver le lieu

des points tels, que les tangentes, menées de ces points aux deux circonférences, soient égales entre elles.

Remarque. — Le lieu de ces points est une perpendiculaire à la ligne des centres; il est l'*axe radical* des deux cercles. Cette définition, adoptée d'abord, a été modifiée (*voir* nos *Éléments*, Note 40).

Si deux cercles se coupent, il est facile de reconnaître que leur axe radical est leur corde commune indéfiniment prolongée.

Les axes radicaux de trois cercles, considérés deux à deux, concourent en un même point, qui est le *centre radical* des trois cercles, ou bien ces axes sont parallèles.

Pour construire l'axe radical de deux cercles O et O′, qui n'ont aucun point commun, on décrit un troisième cercle O″ qui coupe les deux cercles donnés; alors la corde commune aux cercles O, O″ et la corde commune aux cercles O′, O″ se rencontrent au centre radical M des trois cercles O, O′, O″, et, en abaissant de ce point une perpendiculaire sur la ligne OO′, cette perpendiculaire sera l'axe radical cherché.

274. Si un angle droit tourne autour de son sommet, supposé fixe, quel est le lieu des milieux des cordes des arcs que cet angle intercepte sur une circonférence donnée?

275. Décrire une circonférence passant par deux points donnés A, B et tangente à une droite donnée xy.

Ce problème admet deux solutions; il n'y en aurait qu'une si les droites AB et xy étaient parallèles.

276. Décrire une circonférence passant par deux points donnés A, B et tangente à une circonférence donnée O.

Ce problème a généralement deux solutions.

Remarque. — Ces deux dernières questions sont résolues dans la Note 40 de nos *Éléments*.

277. Décrire une circonférence O′ passant par deux points donnés A, B et coupant une circonférence donnée O, de manière que la corde commune CD soit égale à une longueur donnée m.

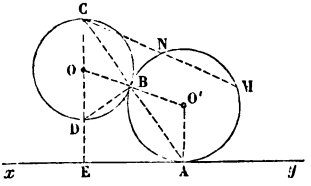
278. Décrire une circonférence O′ passant par deux points donnés A, B et divisant une circonférence donnée O en deux parties égales.

279. Décrire une circonférence passant par un point donné M et tangente à deux droites données. (La circonférence doit

passer par le point M′, symétrique du point M, par rapport à la bissectrice de l'un des angles formés par les droites données, etc.)

280. Décrire une circonférence O′ (*fig.* 9) passant par un point donné M, tangente à une droite donnée xy et à une circonférence donnée O. (Supposons le problème résolu, et soient A, B les points de contact de la circonférence O′ avec la droite xy et la circonférence O; par le centre O menons la droite CODE perpendiculaire à xy, qui rencontre la circonférence O aux points C, D, et la droite xy au point E, et menons le rayon O′A, la droite CA et la corde BD; on voit d'abord que la sécante CA passe par le point de contact B et que le quadrilatère BDEA est inscriptible.

Fig. 9.



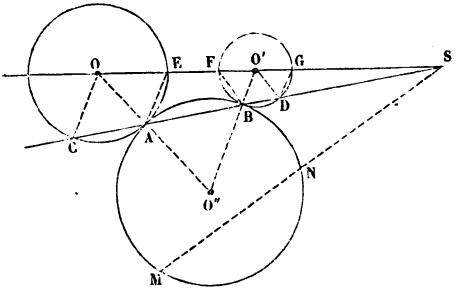
Maintenant, si l'on mène la sécante CM, qui rencontre la circonférence O′ en un second point N, on aura

$$CM.CN = CB.CA = CD.CE,$$

et, par conséquent, la droite CN est déterminée. Ainsi la circonférence cherchée doit passer par les deux points M, N et être tangente à la droite xy, etc.)

Il y aura deux solutions pour le contact extérieur des circonférences et deux autres pour leur contact intérieur.

Fig. 10.



281. Décrire une circonférence O″ (*fig.* 10) passant par un

point M et tangente à deux cercles donnés O, O'. (Supposons le problème résolu, et soient A, B les points de contact de la circonférence O'' avec les circonférences O et O', puis menons les droites OO'', O'O'', la droite AB qui rencontre la ligne des centres au point S et qui coupe les circonférences O, O' aux points C, D, et enfin tirons les rayons OC, O'D : les trois triangles isoscèles OCA, O'BD, O''AB sont semblables et les rayons OC, O'B sont parallèles, d'où il résulte que le point S est un centre de similitude des cercles O, O'. De plus, soient E le point d'intersection de la droite OO' avec la circonférence O et F, G les points où la droite OO' coupe la circonférence O' et menons les droites EA, FB, GD, on aura l'angle EAS = GDS = BFS, et, par conséquent, le quadrilatère ABFE est inscriptible.

Maintenant, si l'on mène la sécante SM, qui rencontre la circonférence O'' en un second point N, on aura

$$SM.SN = SA.SB = SE.SF,$$

et, par suite, on peut obtenir la longueur SN. Ainsi, la circonférence cherchée doit passer par les points M, N et être tangente à la circonférence O, etc.)

Ce problème est susceptible, en général, de quatre solutions, suivant que les cercles donnés doivent être à la fois extérieurs ou intérieurs au troisième, ou bien l'un extérieur et l'autre intérieur. Dans le raisonnement ci-dessus, on suppose que la circonférence O'' est tangente extérieurement aux circonférences O, O'.

282. Décrire une circonférence O' tangente à deux droites données xy, zt et à un cercle donné O. (Supposons le problème résolu, et soient A, B, C les points de contact de la circonférence cherchée avec les droites xy, zt et la circonférence O; puis, du point O' comme centre, avec le rayon O'O, décrivons une circonférence. Cette circonférence, concentrique à la circonférence cherchée, passera par le point O, et elle sera tangente aux droites $x'y'$, $z't'$, parallèles aux droites xy, zt et distantes de xy, zt d'une longueur égale au rayon OC. Ainsi ce problème est ramené à la question 279.)

La circonférence cherchée pouvant être tangente extérieu-

rement ou tangente intérieurement à la circonférence donnée, le problème admet quatre solutions.

283. Décrire une circonférence O″ tangente à une droite donnée xy et à deux cercles donnés O, O′. (Soient A, B, C les points de contact de la circonférence cherchée O″ avec la droite xy et les cercles O, O′, et supposons qu'on ait $O'C < OB$; puis, du point O″ comme centre, avec le rayon O″O′, décrivons une circonférence qui coupe le rayon OB au point D. Cette nouvelle circonférence, concentrique avec la circonférence cherchée, passera par le point O′; elle sera tangente à la droite $x'y'$, parallèle à xy et distante de xy d'une longueur égale au rayon O′C, et elle sera aussi tangente à la circonférence décrite du point O, comme centre, avec le rayon connu OD; donc ce problème revient à la question 280, etc.)

Ce problème peut admettre huit solutions. Dans la solution qu'on vient d'exposer, on suppose que la circonférence O″, tangente à xy, est tangente extérieurement aux circonférences données.

284. Décrire un cercle O‴ tangent à trois cercles donnés O, O′, O″. (Soient A, B, C les points de contact de la circonférence cherchée O‴ avec les circonférences O, O′, O″, et supposons, par exemple, que O″C soit le plus petit des trois rayons donnés; puis, du point O‴ comme centre, avec le rayon O‴O″, décrivons une circonférence qui coupe le rayon OA au point D et le rayon O′B au point E. Cette nouvelle circonférence, concentrique avec la circonférence cherchée, passera par le point O″, et elle sera tangente aux circonférences décrites des points O et O′ comme centre, avec les rayons connus OD, O′E. Ainsi ce problème revient à la question 281.)

Ce problème peut admettre aussi huit solutions. Dans la solution qu'on vient d'exposer, on suppose que la circonférence O‴ est tangente extérieurement aux trois circonférences données.

TROISIÈME SECTION.

285. Trouver le lieu des points dont les distances à deux points fixes A, B soient entre elles dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

Remarque. — Ce problème est résolu dans la Note 42 de nos *Éléments* et dans la Note 16 de l'*Abrégé*.

286. Étant données deux circonférences extérieures, on mène deux rayons parallèles et l'on joint l'extrémité de chacun de ces rayons au centre de l'autre circonférence; quel est le lieu des points d'intersection des deux droites ainsi obtenues?

287. Quel est le lieu des points d'où l'on voit sous des angles égaux deux cercles donnés?

288. Étant donnés quatre points A, B, C, D sur une droite indéfinie, trouver le lieu des points M tels, qu'en les joignant aux points A, B, C, D on forme des angles égaux AMB, CMD? (Les deux triangles MAB, MCD, ayant un angle égal M et des hauteurs égales, on a

$$(1) \qquad \frac{AM.MB}{CM.MD} = \frac{AB}{CD},$$

et, par une raison semblable, les triangles MAC, MBD donnent

$$(2) \qquad \frac{AM.MC}{BM.MD} = \frac{AC}{BD}.$$

Multipliant (1) par (2), il vient

$$\frac{\overline{AM}^2}{\overline{MD}^2} = \frac{AB.AC}{CD.BD};$$

alors, en remplaçant les produits AB.AC et CD.BD par les carrés équivalents m^2 et n^2 et extrayant les racines carrées des deux membres, on a

$$\frac{AM}{MD} = \frac{m}{n}.$$

Ainsi les distances du point M aux points A et D sont entre elles dans le rapport de m à n, etc.)

289. Dans un triangle ABC, rectangle en A, on mène la bissectrice CD de l'angle C; démontrer qu'on a

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC - AC}{AD}.$$

290. Si du sommet A du triangle isoscèle ABD on mène à la base une droite quelconque AB, on a la relation

$$AB.AC = \overline{AB}^2 = BD.DC + \overline{AD}^2.$$

Remarque. — Si AD est la bissectrice de l'angle A d'un triangle quelconque ABC, on a

$$(1) \qquad AB.AC = BD.DC + \overline{AD}^2;$$

ainsi, de la question 290 on peut conclure que, si dans un triangle on a la relation (1), on ne peut pas conclure que, dans tous les cas, la droite AD est la bissectrice de l'angle A.

291. Dans tout triangle ABC, le produit des distances BB′, CC′ des sommets B et C à la bissectrice de l'angle intérieur A est égal au carré de la moitié BC, diminué du carré de la demi-différence des côtés AB, AC, en sorte qu'on a la relation

$$BB'.CC' = \frac{\overline{BC}^2}{4} - \left(\frac{AB - AC}{2}\right)^2 = \frac{\overline{BC}^2}{4} - \frac{\overline{BD}^2}{4},$$

D étant le point de rencontre de CC′ avec AB.

(En multipliant les deux membres par 4, la question revient à démontrer qu'on a

$$2BB'.CD = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

or dans cette égalité la droite BB′ est égale à la projection de la médiane BC′ sur la base CD du triangle BCD, etc.)

Remarque. — S'il s'agissait des distances BB′, CC′ à la bissectrice de l'angle extérieur CAx, on aurait

$$BB'.CC' = \left(\frac{AB + AC}{2}\right)^2 - \frac{\overline{BC}^2}{4}.$$

292. Construire un triangle, connaissant un côté, un angle et le rapport des deux autres côtés.

293. Construire un triangle semblable à un triangle donné et dont les sommets soient situés sur trois circonférences concentriques données. (Se reporter à la remarque qui suit la question 201.)

294. Étant donnes deux points A et B sur une circonfé-

rence, déterminer sur cette ligne un troisième point C tel, que le produit de ses distances aux deux premiers soit égal à un carré donné m^2.

295. Désignant par a, b, c les côtés d'un triangle ABC; par $2p$ son périmètre; par S sa surface; par R, r, r', r'', r''' le rayon du cercle circonscrit, le rayon du cercle inscrit et les rayons des cercles exinscrits; par h, h', h'' les trois hauteurs; démontrer les relations

1° $$R = \frac{abc}{S};$$

2° $$S = pr = (p-a)r' = (p-b)r'' = (p-c)r''';$$

3° $$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},\quad r' = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},\ldots;$$

4° $$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''};$$

5° $$rr'r''r''' = S^2;$$

6° $$\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}.$$

296. Des premières relations ci-dessus (1° et 2°) déduire celle-ci

$$r' + r'' + r''' - r = 4R.$$

QUATRIÈME SECTION.

297. Dans tout trapèze, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés non parallèles, plus deux fois le rectangle des deux bases.

298. Calculer les diagonales d'un trapèze, connaissant ses quatre côtés.

299. Trouver la surface d'un trapèze ABCD en fonction de ses côtés.

(Désignons par a la plus grande base AB; par b, c, d les autres côtés BC, CD, DA; par S la surface cherchée et menons la droite CE, parallèle à DA, jusqu'à la rencontre de AB en E.

Dans le triangle CEB on connaît les trois côtés et, par suite, la hauteur abaissée du point C, etc.

Alors il est facile d'obtenir la formule

$$S = \frac{1}{4}\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(a-c+b+d)(a-c+d-b)(a-c+b-d)(b+d-a+c)}.$$

Remarque. — Si l'on suppose $a = c$, il s'ensuit que $b = d$; dans ce cas le problème est indéterminé, et c'est ce qu'indique la formule en se présentant sous la forme $\infty \times 0$ ou $\frac{0}{0}$.

300. Dans tout trapèze ABCD, la différence des carrés des diagonales AC,BD est à la différence des carrés des côtés non parallèles AD, BC comme la somme des bases AB + DC est à leur différence AB — DC. (Par le sommet C menons CE parallèle à la diagonale DB, qui rencontre AB prolongée au point E et soient F le milieu de AE et CG perpendiculaire sur AE, on aura

$$\overline{AC}^2 - \overline{DB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CE}^2 = 2\,AE.\,FG = 2\,(AB + DC).\,FG.$$

De même, si l'on mène CH parallèle à DA, le point F sera encore le milieu de HB, et l'on aura

$\overline{AD}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{CB}^2 = 2\,HB.\,FG = 2\,(AB - DC).\,FG$, etc.)

301. Si un point E est pris dans l'intérieur d'un rectangle ABCD, les sommes des carrés des distances de ce point à deux sommets opposés sont égales entre elles.

302. Dans tout quadrilatère, la somme des carrés des diagonales est double de la somme des carrés des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

303. Dans tout quadrilatère ABCD, la somme des carrés de deux côtés opposés AB, CD, plus quatre fois le carré de la droite EF qui joint les milieux de ces côtés, est égale à la somme des carrés des deux autres côtés, plus la somme des carrés des diagonales. (Soient G et H les milieux des diagonales, on aura égard à ce que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme, etc.)

304. Soient ABCD un quadrilatère, E le milieu de la droite

qui joint les milieux des diagonales et supposons que du point E, comme centre, on décrive une circonférence, la somme des carrés des distances d'un point quelconque P de cette circonférence aux quatre sommets A, B, C, D est égale à la somme des carrés des distances du point E aux mêmes sommets, plus quatre fois le carré de la droite PE. (On remarquera que le point E est le centre des moyennes distances des sommets A, B, C, D, etc.)

305. Démontrer que le produit des distances d'un point quelconque d'une circonférence à deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans cette circonférence est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés.

306. Dans un quadrilatère inscrit ABCD les deux côtés contigus AB, BC sont égaux et l'on mène les diagonales AC, BD, qui se coupent au point E : démontrer que chacun des côtés égaux est moyen proportionnel entre la diagonale entière BD et le segment BE.

307. Démontrer la Question 147, en se fondant sur la proposition relative aux diagonales et aux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit, ainsi que sur sa réciproque.

CHAPITRE III.

§ I. — Sur la construction et la division des polygones.

Comme certaines questions contenues dans ce paragraphe et dans le suivant se résolvent au moyen de l'Algèbre, nous croyons utile de faire d'abord les deux observations suivantes.

I. — Sur l'emploi de l'Algèbre pour résoudre des problèmes de Géométrie.

Résoudre un problème de Géométrie par l'Algèbre, c'est, en général, faire dépendre sa solution de la valeur d'une droite en fonction de droites connues.

Pour cela, on conçoit que les droites données et la droite inconnue aient été mesurées avec une unité quelconque, puis on représente ordinairement les mesures des droites données par des lettres telles que a, b, c,..., et l'inconnue par x, par exemple; alors il s'agit de trouver d'abord une *équation* qui lie toutes ces mesures entre elles et, s'il y a lieu, la *formule* qui donne la valeur de x en fonction de a, b, c, ... Ensuite on déduit de cette équation ou de cette formule les *constructions* qu'il faut faire avec les droites données pour obtenir la droite inconnue.

Ainsi : 1° Supposons qu'on arrive à une équation de la forme $ax = bc$, ou à cette formule $x = \frac{bc}{a}$. Cette équation ou cette formule peut être remplacée par la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, et l'on voit que x est une quatrième proportionnelle aux trois droites a, b, c.

2° Soit la formule $x = \frac{abc}{df}$. On a $x = \frac{ab}{d} \times \frac{c}{f}$, et, comme on peut trouver une droite g égale à $\frac{ab}{d}$, on aura $x = \frac{gc}{f}$; donc on obtiendra x en cherchant une quatrième proportionnelle g aux trois droites d, a, b, puis une quatrième proportionnelle aux droites f, g, c.

3° Soit l'équation $ax = b^2$ ou la formule $x = \frac{b^2}{a}$. On en déduit $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$; donc x est une troisième proportionnelle aux deux droites a, b.

4° Soit l'équation $x^2 = ab$ ou $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$; x est une moyenne proportionnelle entre a et b.

5° Soit $x^2 = a^2 + b^2$; x est le côté du carré équivalent à la somme des carrés donnés a^2, b^2, ou l'hypoténuse du triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont a, b.

6° Soit $x^2 = a^2 - b^2$; x est le côté du carré équivalent à la différence des carrés donnés a^2, b^2, ou le côté de l'angle droit du triangle rectangle dont l'hypoténuse est a et dont l'autre côté de l'angle droit est b.

7° Soit $x^2 = ab \pm cd$. On cherchera un carré f^2 équivalent au rectangle ab, puis un carré équivalent au rectangle cd, et l'on aura $x^2 = f^2 \pm g^2$.

8° Soit $ax^2 = bc^2$ ou $x^2 = \frac{b}{a}c^2$, ou enfin $\frac{x^2}{c^2} = \frac{b}{a}$; x sera le côté du carré dont le rapport au carré donné c^2 est $\frac{b}{a}$.

9° Soit $ax - x^2 = b^2$ ou $x(a - x) = b^2$. La somme de x et de $a - x$ est a; donc il s'agit de construire un rectangle équivalent à un carré donné b^2 et dont la somme des dimensions soit égale à la droite a; et l'une quelconque des dimensions du rectangle cherché satisfera à l'équation $x(a - x) = b^2$.

10° Soit $x^2 + ax = b^2$. Cette équation peut se mettre sous la forme

$$x(x + a) = b^2,$$

et l'on voit qu'il s'agit de trouver un rectangle équivalent au carré b^2, et dont la différence des dimensions soit égale à la droite a. La plus petite dimension de ce rectangle sera la droite cherchée.

11° Soit $x^2 - ax = b^2$ ou $x(x-a) = b^2$. En retranchant $x - a$ de x, on trouve pour différence a; donc on cherchera encore un rectangle équivalent à b^2 et dont la différence des dimensions soit la droite a, et la plus grande dimension de ce rectangle sera la droite cherchée.

12° Soit $x^2 + ax = a^2$. De là on tire $x^2 = a^2 - ax = a(a-x)$ ou $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, et l'on voit que x est le plus grand segment de la droite a divisée en moyenne et extrême raison.

Remarque I. — Si dans un problème il est question d'une surface telle qu'un rectangle, un carré, on remplace le rectangle ou le carré par leurs mesures, qui sont ab ou a^2, en représentant les dimensions du rectangle par a, b, et le côté du carré par a.

Remarque II. — Dans la résolution d'un problème de Géométrie par l'Algèbre, il n'est pas toujours facile de choisir tout d'abord la droite qu'il convient le mieux de prendre pour inconnue. Lorsqu'il en est ainsi, on peut représenter par $x, y, z, \ldots$ les différentes droites inconnues qu'on est conduit à mettre en relation avec les droites connues, et, après avoir obtenu autant d'équations qu'on a considéré d'inconnues, on examine avec attention quelles sont celles de ces inconnues qui peuvent *s'éliminer* le plus facilement, et la dernière inconnue qui reste sert à résoudre le problème.

Remarque III. — Quelquefois la résolution d'un problème exige qu'on trouve les valeurs de plusieurs inconnues. Dans ce cas, le problème, s'il est déterminé, doit donner lieu à autant d'équations qu'il y a d'inconnues; alors on résout le système de ces équations, et l'on construit les formules obtenues.

Cette première observation fait l'objet d'une Note dans nos *Éléments de Géométrie*, ainsi que dans l'*Abrégé* de ces éléments.

II. — Sur l'homogénéité.

On appelle *expression homogène, équation homogène,* une expression ou une équation dont tous les termes sont du même degré.

Lorsque les lettres représentent des lignes, le degré d'un terme est égal à la somme des exposants des facteurs algébriques qui entrent dans ce terme. Ainsi $4a^3b^2c$ est du sixième degré.

Le degré d'un terme fractionnaire est le degré du numérateur, diminué de celui du dénominateur; et le degré d'un terme irrationnel s'obtient en divisant le degré de la quantité placée sous le radical par l'indice de ce radical.

Si, dans une équation telle que $abc = 4RS$, les lettres a, b, c, R représentent des lignes et que S désigne une surface, l'équation est encore homogène; car une surface est considérée comme un produit de deux dimensions.

Remarque. — Lorsqu'on applique l'Algèbre à la résolution d'un problème de Géométrie, si aucune ligne considérée dans la question n'est prise pour unité, l'équation ou les équations qu'on obtient doivent être homogènes.

On reconnaît facilement que ce principe est vérifié pour toutes les égalités auxquelles donnent lieu les théorèmes des *Éléments de Géométrie*. Par exemple, en représentant par a, b, c l'hypoténuse et les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, on a l'équation homogène

$$a^2 = b^2 + c^2;$$

mais, si l'hypoténuse a est prise pour unité, on a l'équation

$$1 = b^2 + c^2,$$

qui cesse d'être homogène.

Dans ce cas, les lettres b, c expriment les rapports des côtés de l'angle droit à l'hypoténuse, et, si l'on veut rétablir l'homogénéité, il faut remplacer ces lettres par les rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$; alors il vient

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \quad \text{ou} \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

On procède de la même manière pour rétablir l'homogénéité dans une relation géométrique non homogène. Si l'on désigne par l la ligne qui a été prise pour unité, il faut remplacer les lettres a, b, c, ... par les rapports $\frac{a}{l}$, $\frac{b}{l}$, $\frac{c}{l}$, ...

Les formules que l'on construit doivent être homogènes.

Le principe de l'homogénéité offre cet avantage : lorsqu'on fait des calculs relatifs à des équations homogènes, toutes les relations qu'on obtient doivent être aussi homogènes, et, s'il n'en est pas ainsi, on doit en conclure qu'on a commis des erreurs de calcul.

308. Construire un triangle équilatéral et équivalent à un carré donné m^2. (On connaît la *forme* et la *grandeur* du

triangle cherché ; on construira donc un triangle équilatéral quelconque ABC et la question reviendra à construire un triangle semblable à ABC et équivalent au carré m^2, etc.)

309. Construire un triangle, connaissant ses angles et sa surface m^2. (On connaît encore la forme et la grandeur du triangle cherché.)

310. Construire un rectangle, connaissant sa surface et la somme des carrés de ses dimensions.

311. Diviser un triangle ABC en deux parties équivalentes par une parallèle à la base BC. (Soit DE cette parallèle; on aura d'abord

$$\frac{ADE}{1} = \frac{DECB}{1} = \frac{ABC}{2};$$

d'ailleurs, à cause de la similitude des triangles ADE, ABC, on a aussi

$$\frac{ADE}{\overline{AD}^2} = \frac{ABC}{\overline{AB}^2}; \quad \text{donc} \quad \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi la question revient à construire un carré qui soit au carré fait sur AB comme 1 est à 2, etc.)

Remarque. — On divisera de même le triangle ABC, de manière qu'on ait

$$\frac{ADE}{m} = \frac{DECB}{n} = \frac{ABC}{m+n}.$$

312. Diviser un triangle ABC en un nombre quelconque de parties égales par des parallèles au côté BC, en trois parties égales par exemple. (Soient DE, FG les parallèles cherchées; on aura

$$\frac{ADE}{1} = \frac{AFG}{2} = \frac{ABC}{3},$$

et, comme les triangles ADE, AFG, ABC sont semblables, on a aussi

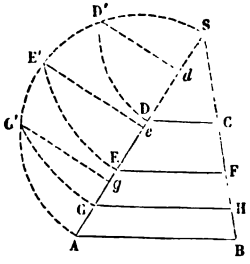
$$\frac{ADE}{\overline{AD}^2} = \frac{AFG}{\overline{AF}^2} = \frac{ABC}{\overline{AB}^2}$$

et, par suite,

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\overline{AF}^2}{\overline{BA}^2} = \frac{2}{3}, \ldots)$$

313. Diviser un trapèze ABCD (*fig.* 11) en un nombre quelconque de parties équivalentes par des parallèles aux bases AB, DC, en trois parties équivalentes, par exemple. (Soient EF, GH ces parallèles, et prolongeons AD, BC jusqu'à leur rencontre en S; on aura d'abord

Fig. 11.



$$\frac{SDC}{\overline{SD}^2}=\frac{SEF}{\overline{SE}^2}=\frac{SGH}{\overline{SG}^2}=\frac{SAB}{\overline{SA}^2}.$$

Maintenant, décrivons sur SA une demi-circonférence et menons les cordes SD', SE', SG', SA' respectivement égales aux côtés SD, SE, SG, SA, puis projetons ces cordes sur SA, en S*d*, S*e*, S*g*, SA, on aura, d'après la question 242,

$$\frac{\overline{SD}^2}{Sd}=\frac{\overline{SE}^2}{Se}=\frac{\overline{SG}^2}{Sg}=\frac{\overline{SA}^2}{SA};$$

et, par suite,

$$\frac{SDC}{Sd}=\frac{SEF}{Se}=\frac{SGH}{Sg}=\frac{SAB}{SA}$$

et

$$\frac{DCFE}{de}=\frac{EFHG}{eg}=\frac{GHBA}{gA};$$

mais les trapèzes DCEF, EFHG, GHBA sont équivalents; donc les droites *de*, *eg*, *g*A doivent être égales.

Ainsi, pour résoudre la question, on projettera SD' sur AB en S*d*, on divisera *d*A en trois parties égales; aux points *e* et *g*, on élèvera les perpendiculaires *e*E', *g*G', et l'on rabattra sur SA les cordes SE', SG' sur SA en SE et SG, et les points E et G seront les points par lesquels il faut mener les parallèles EF, GH.)

Remarque. — Le triangle SBC peut être regardé comme un trapèze dont l'une des bases est BG et dont l'autre est nulle; par conséquent, cette question comprend les deux précédentes.

314. Par un point D pris sur un côté AB du triangle ABC, mener une droite DE qui divise ce triangle en deux par-

ties équivalentes. (Pour fixer les idées, supposons qu'on ait AD > DB; alors le triangle ADC est plus grand que le triangle DBC, et la droite DE rencontrera le côté AC en E et l'on aura

$$\frac{ADE}{1} = \frac{DECB}{1} = \frac{ABC}{2}.$$

Mais les triangles ADE, ABC, ayant un angle égal, sont proportionnels aux produits des côtés qui comprennent cet angle; donc

$$\frac{AD.AE}{1} = \frac{AB.AC}{2} \quad \text{ou} \quad 2AD.AE = AB.AC;$$

d'où l'on voit que la droite inconnue AE est une quatrième proportionnelle aux droites 2 AD, AB, AC.

On prolongera donc AD d'une longueur DF = AD, on joindra FC et l'on mènera BE parallèle à FC, et la droite AE sera la droite cherchée.)

Remarque. — Lorsque l'Algèbre conduit ainsi à une construction, il faut, autant que possible, adapter cette construction à la figure donnée.

Cette question a déjà été proposée pour être résolue géométriquement (*voir* quest. 180), et, dans les deux cas, la construction reste la même.

315. Élever sur un côté BC du triangle ABC une perpendiculaire EF qui divise ce triangle en deux parties équivalentes. (Soit AD la hauteur du triangle et supposons BD > DC; la droite EF rencontrera le côté AB en F, etc.).

On trouvera que la droite inconnue BE doit être une moyenne proportionnelle entre BD et $\frac{1}{2}$BC.

Remarque. — Plus généralement, on peut se proposer de diviser le triangle ABC en deux parties équivalentes par une parallèle à une droite donnée.

316. Par un sommet A du quadrilatère ABCD, mener une droite AE qui divise ce quadrilatère en deux parties équivalentes. (Supposons que le triangle ABC soit plus grand que le triangle ACD; alors la droite AE doit rencontrer le côté

BC en E et, si l'on prolonge les côtés AD, BC jusqu'à leur rencontre au point S, on aura

$$ABE = AECD$$

ou

$$SAB - SAE = SAE - SDC.$$

Mais les triangles SAB, SAE, SDC, ayant l'angle S commun, sont proportionnels aux produits des côtés qui comprennent cet angle; donc

$$SA.SB - SA.SE = SA.SE - SD.SC;$$

d'où l'on tire la valeur de la droite inconnue, ce qui donne

$$SE = \frac{SB}{2} + \frac{SD.SC}{2SA}.$$

On construira la droite SE, on la portera sur SB en SE et la droite AE sera la droite demandée).

317. Partager un quadrilatère ABCD en deux parties équivalentes par une parallèle à l'un de ses côtés AB.

318. Soit un triangle ABC et supposons qu'on joigne les milieux A′, B′, C′ des côtés BC, CA, AB, puis qu'on joigne de même les milieux A″, B″, C″ des côtés B′C′, C′A′, A′B′ du triangle A′B′C′, et ainsi de suite. On demande la limite vers laquelle tend la somme des périmètres du triangle ABC et des différents triangles A′B′C′, A″B″C″, ...

Question analogue, en considérant les surfaces des mêmes triangles.

319. Soit un triangle ABC rectangle en A, et supposons que du point A on abaisse une perpendiculaire AD sur l'hypoténuse CB, que du point D on abaisse une perpendiculaire DE sur AB, que du point E on abaisse une perpendiculaire EF sur DB et ainsi de suite. On demande la limite vers laquelle tend la somme des surfaces des triangles ADC, DAE, EDF, ...

§ II. — Construction d'un rectangle équivalent à un carré donné et dont la somme ou la différence des dimensions est égale à une droite donnée. — Division d'une droite en moyenne et extrême raison.

Les trois problèmes que comprend ce paragraphe sont ordinairement résolus synthétiquement dans tous les Éléments de Géométrie ; nous allons les résoudre au moyen de l'Algèbre, en modifiant les énoncés des deux premiers.

320. Trouver deux droites x et y dont la somme est a et dont le produit est égal à m^2. (En résolvant le système d'équations

$$x + y = a,$$
$$xy = m^2,$$

on trouve

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2},$$
$$y = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2}.$$

A la première valeur de x correspond la première valeur de y, et à la seconde valeur de x la seconde valeur de y; d'où il résulte que le problème n'admet qu'une solution.)

Remarque I. — Pour construire la première valeur de x, on prend d'abord la moitié AO de la droite donnée AB $= a$ et l'on ajoute à la suite le côté OE de l'angle droit d'un triangle rectangle OED, qui a pour hypoténuse OD $= \frac{a}{2}$ et m pour l'autre côté de l'angle droit. On retrouve ainsi la construction synthétique connue.

Remarque II. — D'après cette construction, on voit que *la moyenne arithmétique de deux droites inégales* AE *et* EB *est plus grande que leur moyenne géométrique.*

Remarque III. — Pour que les valeurs de x et de y conviennent à la question, il faut qu'elles soient réelles et que l'on ait

$$m^2 < \frac{a^2}{4} \quad \text{ou au plus égal à} \quad \frac{a^2}{4}.$$

Ainsi, *le maximum du produit de deux droites, dont la somme est constante, est le carré de la moitié de cette somme*, ou, en d'autres

termes, *si une droite a est divisée en deux parties, le produit maximum de ces parties est* $\frac{a^2}{4}$, *c'est-à-dire le carré de la moitié de cette droite.*

De plus, les valeurs de x et de y doivent être positives; or elles le sont évidemment.

Remarque IV. — La résolution de cette question 320 donne le moyen de construire immédiatement les racines de l'équation homogène du second degré

$$ax - x^2 = q^2 \quad \text{ou} \quad x(a - x) = q^2.$$

Elle donne aussi le moyen d'obtenir les racines de l'équation

$$x^2 + ax + q^2 = 0;$$

car les racines de cette équation ne sont autres que celles de l'équation précédente, changées de signes.

Remarque V. — Au lieu de considérer deux inconnues, on aurait pu n'en considérer qu'une. En désignant par x l'une des parties de a, l'autre serait $a - x$, et l'on aurait à résoudre l'équation

$$x(a - x) = m^2,$$

ce qui donne encore

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2},$$

et, par suite,

$$a - x = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2}.$$

321. Trouver deux droites x et y dont la différence est a et dont le produit est égal à m^2. (En supposant que x désigne la plus grande des deux droites, on a à résoudre le système d'équations

$$x - y = a,$$
$$xy = m^2,$$

on trouve

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + m^2}$$

et, pour valeurs correspondantes de y,

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + m^2}.$$

La première valeur de x et la première valeur de y sont réelles et positives et donnent une solution de la question;

la seconde valeur de x et la seconde valeur de y sont négatives et doivent être négligées.

Remarque I. — En construisant les valeurs de x et de y, on retrouve la construction synthétique connue.

Remarque II. — La question admet toujours une solution.

Remarque III. — La résolution de cette question donne le moyen de construire immédiatement les racines de l'équation

$$x^2 - ax = q^2 \quad \text{ou} \quad x(x-a) = q^2.$$

Elle donne aussi le moyen de construire les racines de l'équation

$$x^2 + ax = q^2,$$

qui s'obtient en remplaçant dans la précédente x par $-x$.

322. Diviser une droite donnée AB ou a en moyenne et extrême raison. (Soit x le plus grand segment de a, l'autre sera $a - x$, et l'on aura à résoudre l'équation

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \quad \text{ou} \quad x^2 + ax - a^2 = 0.$$

On trouve

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

La première valeur de x est réelle et positive et donne une solution de la question; la seconde valeur est négative et doit être rejetée.)

Remarque I. — En construisant la première valeur de x, on retrouve encore la construction synthétique connue.

Remarque II. — En définitive, le plus grand des segments de a est

$$a \times \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

et le plus petit segment est égal à

$$a \times \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi le rapport du grand segment au petit est constant; donc *les segments des deux droites* AB, A'B', *divisées chacune en moyenne et extrême raison, sont proportionnels.*

Remarque III. — On reconnaît facilement que le plus petit segment MB d'une droite AB, divisée en moyenne et extrême raison, au point M, est le plus grand segment de la droite AM, divisée en moyenne et extrême raison.

323. Diviser en moyenne et extrême raison la surface d'un triangle ABC par une parallèle au côté BC (deux cas).

324. Trouver une droite, connaissant le plus grand ou le plus petit segment de cette droite divisée en moyenne et extrême raison.

DIFFÉRENTES QUESTIONS SUR CE TROISIÈME LIVRE.

325. Une droite étant prise pour unité, trouver la droite représentée par $\sqrt{6}$. (On a $6 = 2 \times 3$, et l'on cherchera une moyenne proportionnelle entre deux droites contenant respectivement 2 et 3 unités.)

Remarque. — Pour obtenir la droite représentée par $\sqrt{7}$, on a

$$7 = 1 \times 7 \ldots.$$

326. Trouver une droite x qui soit à une droite donnée a comme $\sqrt{3}$ est à $\sqrt{5}$. $\left(\text{On doit avoir } \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \text{ ou } \frac{x^2}{a^2} = \frac{3}{5}, \text{ etc.}\right)$

327. Construire un carré qui soit à un carré donné comme $\sqrt{3}$ est à $\sqrt{5}$.

328. Trouver une droite qui soit à une droite donnée comme $\sqrt[4]{3}$ est à $\sqrt[4]{5}$.

329. Construire un carré qui soit à un carré donné comme $\sqrt[4]{3}$ est à $\sqrt[4]{5}$.

330. On a un cercle et une corde AB qui sous-tend un arc AMB, dont le point M est le milieu; mener par le point M une seconde corde qui coupe AB au point C et la circonfé-

rence au point N, de telle sorte que CN soit égale à une droite donnée m. (En joignant AM et AN, les triangles AMN, AMC sont semblables et donnent

$$\frac{MN}{AM} = \frac{AM}{MC}, \quad \text{d'où} \quad MN.MC = \overline{AM}^2;$$

d'ailleurs $MN - MC = m$. Ainsi l'on peut obtenir la droite MN, etc.)

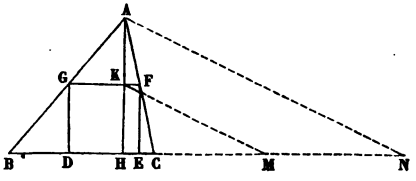
331. Construire un triangle ABN, connaissant sa base AB, l'angle opposé ANB et la longueur m de la bissectrice NC de cet angle. (Question facile d'après la précédente.)

332. Par un point C, pris sur la bissectrice d'un angle ANB, mener une sécante ACB telle, que la partie AB de cette sécante, comprise entre les côtés de l'angle, ait une longueur donnée. (On s'appuiera sur la question précédente.)

Remarque. — Ce problème, dans le cas particulier où l'angle donné ANB est droit, est connu sous le nom de *problème de Pappus*, célèbre géomètre qui vivait au IVe siècle.

333. Inscrire un carré dans un triangle donné ABC (*fig.* 12). Soient DEFG le carré cherché, x son côté, AH la hauteur du triangle qui coupe GF au point K.

Fig. 12.



Dans les triangles semblables ABC, AGF, les bases $BC = a$, $GF = x$ sont proportionnelles aux hauteurs $AH = h$, $AK = h - x$, et l'on a

$$\frac{a}{x} = \frac{h}{h-x}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{ah}{a+h};$$

ainsi le côté x du carré est une quatrième proportionnelle aux trois droites $a + h$, a, h.

Pour construire x, prolongeons HC d'une longueur $CM = BH$, portons à la suite de HM la droite $MN = AH$, joignons NA, et par le point M menons une parallèle à NA, qui rencontre AH

au point K; alors HK sera le côté du carré cherché, car on a

$$\frac{\text{HN ou } a+h}{\text{HM ou } a} = \frac{\text{HA ou } h}{\text{HK ou } x}.$$

Remarque. — Cette question n'est autre que la question 198, qu'il s'agissait de résoudre géométriquement, en remarquant que la droite BF est un lieu géométrique qu'on est censé connaître d'après la question 197.

334. Inscrire dans un carré donné un second carré dont le côté est donné. Dans quel cas ce second carré sera-t-il le plus petit possible?

335. Inscrire dans un triangle donné ABC un rectangle DEFG équivalent à un carré donné m^2. Dans quel cas ce rectangle est-il un *maximum?*

Remarque. — Les *Éléments d'Algèbre* contiennent ordinairement un assez grand nombre de questions relatives à des figures géométriques et où il s'agit de *maxima* et de *minima*.

336. Diviser une droite donnée a en deux parties telles, que la somme ou la différence des carrés construits sur ces parties soit équivalente à un carré donné m^2.

337. Trouver deux droites x, y telles, qu'on ait

$$xy = a^2,$$
$$x^2 - y^2 = b^2.$$

(Éliminant y on obtient une équation bicarrée, qui donne

$$x^2 = \frac{b^2}{2} \pm \sqrt{\frac{b^4}{4} + a^4}.$$

La seconde valeur de x^2 est négative et doit être rejetée.

Pour construire la première valeur de x^2, mettons-la sous la forme

$$x^2 = \frac{b^2}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{2}\left(\frac{b^2}{2} + \frac{2a^4}{b^2}\right)},$$

puis cherchons un carré m^2 égal à $\frac{b^2}{2}$ et un second carré n^2 égal à $\frac{b^2}{2} + \frac{2a^4}{b^2}$, il viendra

$$x^2 = m^2 + mn \quad \text{ou} \quad x^2 = m^2 + p^2,$$

en désignant par p une moyenne proportionnelle entre m et n.

Connaissant x, on aura facilement y, d'après la relation

$$y = \frac{a^2}{x}.$$

Remarque. — Ce problème sert à résoudre celui-ci :

Construire un triangle ABC *rectangle en* A, *dont le sommet* C *est donné et dont les deux autres sommets* B *et* A *sont situés sur deux parallèles données* xy, $x'y'$, *et dans lequel la différence des carrés des côtés* AB, AC *de l'angle droit est égale à un carré donné* m^2. (Soient BB′ et CC′ perpendiculaires sur $x'y'$, on aura

$$\overline{AB}^2 = \overline{BB'}^2 + \overline{AB'}^2 \quad \text{et} \quad \overline{AC}^2 = \overline{CC'}^2 + \overline{AC'}^2;$$

donc

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = m^2 = \overline{BB'}^2 - \overline{CC'}^2 + \overline{AB'}^2 - \overline{AC'}^2,$$

d'où

$$\overline{AB'}^2 - \overline{AC'}^2 = m^2 - a^2,$$

en posant

$$\overline{BB'}^2 - \overline{CC'}^2 = a^2.$$

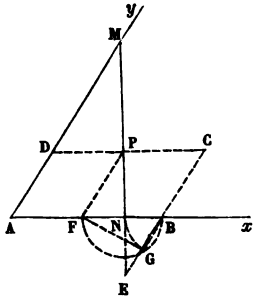
D'ailleurs les triangles ABB′, CAC′ sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires; donc

$$AB'.AC' = BB'.CC'.$$

Ainsi l'on connaît le produit AB′.AC′ et la différence $\overline{AB'}^2 - \overline{AC'}^2$; donc on peut, d'après la question précédente, connaître les droites AB′ et AC′, etc.)

338. On donne un angle yAx (*fig.* 13) et un point P situé entre les côtés de l'angle; mener par ce point une sécante, de manière à former un triangle équivalent à un carré donné m^2. (Soit MPN la sécante demandée; par le point P menons une parallèle à Ax, qui coupe Ay au point D et construisons le parallélogramme ABCD équivalent à m^2, ce qui revient à trouver une troisième proportionnelle à la hauteur du parallélogramme et à la droite m, et supposons que MN coupe CB au point E; d'après la condition du problème, on doit avoir

Fig. 13.



$$MDP = PNBC \quad \text{ou} \quad MDP = PCE - NBE;$$

mais ces trois triangles sont semblables et, par conséquent, ils sont proportionnels aux carrés de leurs côtés homologues, donc

$$\overline{DP}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{NB}^2, \quad \text{d'où} \quad \overline{NB}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{DP}^2.$$

Pour construire BN, menons PF parallèle à DA, sur FB comme diamètre décrivons une demi-circonférence, prenons la corde FG = FA et joignons GB ; alors BG sera égal à BN.)

Remarque I. — Pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait

$$PC > DP \quad \text{ou au moins égale à} \quad DP.$$

Dans ce dernier cas, le point N se confond avec le point B et le point P est le milieu de la droite MN; d'ailleurs le parallélogramme, et par suite le triangle AMN, est un *minimum :* ainsi, *pour mener par le point* P *une sécante* MN *qui forme un triangle* AMN *ayant la plus petite surface possible, il faut que le point* P *soit le milieu de* MN.

Remarque II. — Même question, en supposant que le point P ne soit pas compris entre les côtés de l'angle donné.

QUESTIONS SUR LE LIVRE IV.

CHAPITRE I.

§ I et II. — Sur les polygones réguliers.

339. On peut juxtaposer sur un plan des triangles équilatéraux égaux, ou des carrés égaux, ou des hexagones réguliers égaux, sans laisser d'intervalles entre ces polygones : démontrer que ces polygones réguliers sont les seuls qui jouissent de cette propriété.

340. On peut de même recouvrir un plan en juxtaposant des octogones réguliers avec des carrés, des dodécagones réguliers avec des triangles équilatéraux, des pentagones réguliers avec des losanges dont l'angle aigu est égal à $\frac{2}{5}$ de droit.

341. Connaissant la différence entre la diagonale et le côté d'un carré, construire ce carré. (On aura un système semblable à celui qu'on cherche, en construisant un carré quelconque et sa diagonale; on en déduira le côté du carré demandé, en observant que les côtés de deux carrés sont entre eux comme leurs diagonales ou comme les différences entre ces diagonales et les mêmes côtés.)

342. En construisant un carré extérieur sur chaque côté d'un hexagone régulier et en joignant les sommets consécutifs des carrés voisins, on forme un dodécagone régulier.

343. Construire un décagone régulier dont on connaît le côté.

344. Si l'on joint de trois en trois les sommets du décagone régulier inscrit, jusqu'à ce qu'on soit revenu au point de départ, on forme un polygone concave qui est le *décagone régulier étoilé :* démontrer que son côté est égal au côté du décagone régulier inscrit, augmenté du rayon.

345. Démontrer que les diagonales d'un pentagone régulier se divisent mutuellement en moyenne et extrême raison.

346. Le carré du côté du pentagone régulier inscrit est égal au carré du côté du décagon erégulier inscrit, plus le carré du rayon. (En prenant le rayon pour unité et désignant par C_5 le côté du pentagone régulier inscrit, par C_{10} le côté du décagone régulier inscrit, on sait qu'on a

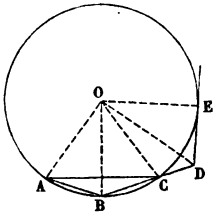
$$C_5 = \tfrac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad C_{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

et il est facile de vérifier qu'on a aussi

$$C_5^2 = C_{10}^2 + 1.)$$

Remarque. — Ce théorème peut s'énoncer ainsi : *Le côté du pentagone régulier inscrit est égal à l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui aurait pour côtés de l'angle droit le rayon et le côté du décagone régulier inscrit.*

Fig. 14.



On peut démontrer ce théorème géométriquement de la manière suivante :

Soient AB, BC (*fig.* 14) deux côtés consécutifs du décagone régulier inscrit et par conséquent AC le côté du pentagone régulier inscrit, et prolongeons BC de manière que BD soit égal au rayon OB; les angles, au sommet des deux triangles isoscèles OAC, BOD sont égaux, et, de plus, OA = OB; donc ces triangles sont égaux, et l'on a

$$OD = AC.$$

Maintenant, du point D menons DE tangente à la circonférence et le rayon OE au point de contact, on aura

$$\overline{OD}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{DE}^2;$$

d'ailleurs la tangente DE est moyenne proportionnelle entre la sécante

entière DB ou le rayon et sa partie extérieure DC; donc la droite DE est égale au côté du décagone régulier inscrit. Ainsi le théorème est démontré.

347. Par un point donné mener une droite qui divise une circonférence dans le rapport de 3 à 5, dans le rapport de 5 à 7.

348. Tout polygone inscrit, d'un nombre impair de côtés et dont les angles sont égaux, est un polygone régulier.

349. Tout polygone circonscrit, dont les angles sont égaux, est un polygone régulier.

350. Tout polygone circonscrit, d'un nombre impair de côtés et dont les côtés sont égaux, est un polygone régulier.

351. Si de tous les sommets d'un polygone régulier on abaisse des perpendiculaires sur une droite xy, leur somme (en donnant le signe + à toutes les perpendiculaires situées d'un côté de la droite donnée et le signe — à celles qui sont situées de l'autre côté de cette droite) sera égale à la perpendiculaire abaissée du centre du cercle circonscrit, multipliée par le nombre des côtés.

Remarque. — Cette question est résolue dans la Note 47 de nos *Éléments de Géométrie.*

352. Quel est le lieu des points tels, que la somme des carrés de leurs distances aux sommets d'un polygone régulier soit constante et égale à un carré donné.

353. Trouver la surface du dodécagone régulier en fonction du rayon R du cercle circonscrit. (En désignant cette surface par S_{12}, on a

$$S_{12} = 3R^2.)$$

354. L'aire d'un octogone régulier inscrit dans un cercle est équivalente à celle du rectangle qui a pour dimensions les côtés des carrés inscrit et circonscrit au même cercle.

355. Démontrer que la surface de l'hexagone régulier in-

scrit est double de celle du triangle équilatéral inscrit dans le même cercle.

356. La surface de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle est les $\frac{3}{4}$ de celle de l'hexagone régulier circonscrit au même cercle.

357. L'aire de l'hexagone régulier inscrit est une moyenne proportionnelle entre les aires des triangles équilatéraux inscrit et circonscrit.

358. Trouver le rapport de la surface de l'hexagone régulier inscrit à celle de l'hexagone régulier circonscrit; à celle du triangle équilatéral circonscrit.

359. Démontrer que les six diagonales, qui joignent de deux en deux les sommets d'un hexagone régulier, déterminent par leurs intersections un second hexagone régulier dont la surface est le tiers de celle du premier.

360. Construire un carré équivalent à un hexagone régulier donné. (Soit x le côté du carré cherché, on aura x^2 égal à la mesure de l'hexagone régulier donné, etc.)

361. Construire un hexagone régulier équivalent à un triangle équilatéral donné. (On connaît la forme et la grandeur du polygone cherché.)

Remarque. — Mais il s'agit plutôt d'égaler la surface inconnue de l'hexagone à la surface du triangle équilatéral.

362. Si, d'un point quelconque pris dans l'intérieur d'un polygone régulier, on abaisse des perpendiculaires sur tous les côtés, la somme de ces perpendiculaires est égale à l'apothème, multiplié par le nombre des côtés.

363. Les surfaces des polygones quelconques circonscrits au même cercle sont entre elles comme les contours de ces polygones.

CHAPITRE II.

§ I, II et III. — Définitions. — Mesure de la circonférence et du cercle. — Calcul d'une valeur approchée de π.

---

364. Soit A l'angle d'un polygone de n côtés : démontrer que la valeur de A tend vers la limite 2 lorsque le nombre n croît indéfiniment.

365. Décrire une circonférence égale à la somme ou à la différence de deux circonférences données. Décrire un cercle équivalent à la somme ou à la différence de deux cercles donnés.

366. Si deux polygones réguliers semblables sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, la circonférence de ce cercle est moyenne proportionnelle entre la circonférence inscrite dans le premier polygone et la circonférence circonscrite au second.

367. On divise deux côtés contigus d'un carré en n parties égales, et des points de division on élève sur ces côtés des perpendiculaires qui divisent le carré proposé en n^2 carrés égaux, dans chacun desquels on inscrit un cercle; démontrer que la somme des surfaces de ces cercles est toujours la même, quel que soit le nombre n.

368. Étant donné un demi-cercle ACB, on abaisse d'un point quelconque C de la circonférence la perpendiculaire CD sur le diamètre AB, et l'on décrit sur les segments AD, DB, comme diamètres, des demi-circonférences AED, DFB, situées dans l'intérieur du demi-cercle : démontrer que la surface de la figure curviligne ACBFDE est équivalente au cercle décrit sur CD, comme diamètre.

369. Si l'on fait rouler un cercle dans un autre de rayon

double, de manière que les deux cercles soient toujours tangents, un point de la circonférence du cercle mobile décrira un diamètre du cercle fixe.

370. Diviser l'aire d'un cercle en deux parties équivalentes par une circonférence concentrique, ou en deux parties qui soient entre elles comme m est à n.

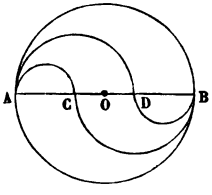
371. Décrire une circonférence qui soit tangente intérieurement à la circonférence d'un cercle donné et qui divise ce cercle en deux parties, dans le rapport de m à n.

372. La surface ou la *couronne*, comprise entre deux circonférences concentriques, est équivalente au cercle qui aurait pour diamètre une corde de la circonférence extérieure, tangente à la circonférenee intérieure.

373. Sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, comme diamètres, on décrit deux demi-cercles extérieurs au triangle, et de la figure totale on retranche le demi-cercle qui a pour diamètre l'hypoténuse; alors il reste deux *lunules*, et il s'agit de démontrer que leur somme est équivalente à l'aire du triangle. (Ces lunules sont connues sous le nom de *lunules d'Hippocrate*.)

374. On divise le diamètre AB d'un cercle O (*fig.* 15) en un certain nombre de parties égales, en trois parties égales par exemple, aux points C, D, puis sur les segments AC, AD, comme diamètres, on décrit deux demi-circonférences d'un côté de AB, et sur les segments CB, DB, comme diamètres, on décrit aussi deux demi-circonférences situées de l'autre côté de AB : démontrer 1° que les lignes courbes ACB, ADB sont égales chacune à la circonférence du cercle O; 2° que ces lignes divisent l'aire du cercle en trois parties équivalentes.

Fig. 15.



375. La somme du triple du rayon d'un cercle et du dixième du carré inscrit est moindre que la demi-circonférence, mais elle en diffère de moins de $\frac{1}{1000}$ du rayon.

376. Un cercle O étant donné, si des extrémités d'un diamètre AB on élève sur AB, dans le même sens, les perpendiculaires AC, BD, l'une égale à trois fois le rayon et l'autre égale au tiers du côté du triangle équilatéral inscrit, la droite CD, qui joint les extrémités de ces perpendiculaires, est moindre que la demi-circonférence du cercle O, mais elle en diffère de moins de $\frac{1}{10000}$ du rayon. (Ainsi, le rayon étant égal à 1, on aura CD = 3,1415 à moins de 0,0001 près.)

QUESTIONS SUR LE LIVRE V.

CHAPITRE I.

§ I, II et III. — Conséquences les plus immédiates de la définition du plan. — Perpendiculaires et parallèles dans l'espace.

377. Trois droites qui ne sont pas dans un même plan ne peuvent pas se rencontrer deux à deux sans passer par le même point.

378. D'un point à une droite, dans l'espace, on ne peut pas mener trois droites égales.

Remarque. — Ainsi, une proposition de la Géométrie plane peut être encore vraie dans l'espace; mais cela n'a pas toujours lieu. Par exemple, il n'est pas vrai de dire que deux droites, perpendiculaires à une troisième dans l'espace, sont parallèles.

379. Un plan ne peut couper une circonférence en plus de deux points.

380. Comment obtenir une droite AB perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans un plan. (D'un point quelconque C de AB il suffit d'élever sur cette droite deux perpendiculaires CD, CE et de mener par ces deux droites un plan; alors on aura la figure demandée.)

381. Une droite qui se meut parallèlement à elle-même, en coupant constamment une autre droite donnée de position, engendre un plan.

382. Si deux droites ne sont pas dans le même plan et qu'on mène par les différents points de l'une une parallèle à l'autre, toutes ces parallèles sont dans un même plan. (On s'appuiera sur ce que deux droites parallèles à une troisième sont parallèles, et sur la question précédente.)

CHAPITRE II.

§ I, II et III. — Des positions relatives de la droite et du plan.

383. Si, d'un point A d'une droite Ax, on mène des droites égales, AB, AC, AD, ... faisant avec Ax des angles égaux, les extrémités B, C, D, ... de ces droites sont situées sur une circonférence dont le plan est perpendiculaire sur Ax, et dont le centre est sur cette droite.

384. Si une droite AB fait des angles égaux avec trois droites BC, BD, BE, passant par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.

385. Dans l'espace, quelle est la plus petite et la plus grande droite qu'on puisse mener d'un point à une circonférence?

386. Lieu géométrique des points de l'espace également distants de deux points donnés?

387. Lieu des points d'un plan également distants de deux points donnés hors de ce plan?

388. Lieu des points de l'espace également distants de trois points non situés en ligne droite?

389. Lieu des points de l'espace tels, que la différence des carrés des distances de chacun d'eux à deux points donnés soit constante? (*Voir* la Quest. 272.)

390. Lieu des points situés sur un plan et tels que la somme des carrés des distances de chacun d'eux à deux points donnés hors du plan soit constante? (Soient A, B les points situés hors du plan donné, C un point du lieu cherché; en projetant

A et B sur le plan, en a et b, la somme des carrés $\overline{Ca}^2 + \overline{Cb}^2$ est constante, etc.)

391. Lieu des points d'un plan d'où l'on voit sous un angle droit une droite située hors de ce plan?

392. Des différents points d'une droite, située dans un plan, on élève d'un même côté de ce plan des droites perpendiculaires au plan et égales entre elles; quel est le lieu des extrémités de ces perpendiculaires?

393. Deux droites parallèles, qui rencontrent un plan, font avec ce plan des angles égaux.

394. Par le pied d'une oblique à un plan mener, dans le plan, une droite qui fasse avec l'oblique un angle donné.

395. Une oblique AB à un plan a pour projection sur ce plan la droite Ba, et par le point B on mène, dans le plan, une droite BC faisant avec Ba un angle aigu; démontrer que l'angle ABC est aussi aigu et qu'il est plus grand que l'angle aBC.

396. Par le pied d'une oblique AB à un plan on mène dans le plan des droites BC, BD, ... et d'un point de l'oblique on abaisse des perpendiculaires sur ces droites; quel est le lieu des pieds de ces perpendiculaires?

§ IV. — Sur deux droites non situées dans le même plan.

397. Étant données deux droites, situées ou non situées dans un même plan, démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse mener par l'une de ces droites un plan perpendiculaire à l'autre est que ces droites soient perpendiculaires entre elles.

398. Étant données deux droites non situées dans le même plan, on peut mener par l'une de ces droites un plan parallèle à l'autre, et l'on n'en peut mener qu'un.

399. Par un point donné on peut mener un plan parallèle à

la fois à deux droites, situées ou non situées dans le même plan, et, en général, on n'en peut mener qu'un. (On en peut mener une infinité, si les deux droites données sont parallèles.)

400. Par un point donné, mener une droite qui rencontre deux droites données.

401. Étant données deux droites, non situées dans le même plan, mener une droite qui les rencontre et qui soit parallèle à une troisième droite donnée.

CHAPITRE III.

§ I, II et III. — Mesure des angles dièdres, plans perpendiculaires ou parallèles entre eux.

402. Un angle dièdre ne peut être mesuré par un angle formé par deux droites menées d'un point de l'arête dans les deux plans, si ces deux droites ne sont pas perpendiculaires à l'arête.

Remarque. — Cette question est résolue dans la Note 58 de nos *Éléments de Géométrie.*

403. Quel est le lieu des points de l'espace équidistants de deux droites qui se coupent; de deux droites parallèles?

404. Quel est le lieu des points de l'espace équidistants de trois droites situées dans le même plan?

405. Par un point donné, on mène des plans perpendiculaires à des droites situées dans un plan P; démontrer que tous ces plans se coupent suivant une droite perpendiculaire au plan P.

406. Une droite, qui coupe deux plans parallèles, fait avec ces plans des angles égaux.

407. Si deux plans parallèles MN, PQ sont coupés par un troisième RS suivant les droites AB, CD, les angles dièdres correspondants RABN, RCDQ sont égaux. (La réciproque n'est pas vraie; mais, si l'on accorde à la fois que les angles dièdres RABN, RCDQ sont égaux et que les intersections AB, CD sont parallèles, on peut conclure le parallélisme des plans MN et PQ.)

Remarque. — Cette question est traitée dans la Note 59 de nos *Éléments.*

408. Quel est le lieu des droites menées par un point donné parallèlement à un plan donné?

409. Lorsque deux droites se coupent, les plans respectivement perpendiculaires à ces droites se coupent aussi.

410. Quel est le lieu des points également distants d'un plan donné?

411. Par une droite parallèle à un plan, on peut mener un plan parallèle au premier, et l'on n'en peut mener qu'un.

412. Par deux droites non situées dans le même plan, on peut mener deux plans parallèles entre eux, et l'on n'en peut mener que deux.

413. Si deux plans P et Q sont respectivement parallèles à deux plans P′ et Q′ qui se coupent, l'intersection des deux premiers plans est parallèle à celle des deux autres.

414. Deux angles dièdres, qui ont leurs faces respectivement parallèles ou perpendiculaires, sont égaux ou supplémentaires.

415. Démontrer que les milieux des quatre côtés d'un quadrilatère gauche sont situés dans un même plan.

416. Lorsqu'une droite divise proportionnellement deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, si l'on mène une seconde droite qui divise aussi les deux autres côtés en parties proportionnelles, ces deux droites se rencontreront.

Remarque. — Cette question est résolue dans la Note 60 de nos *Éléments*.

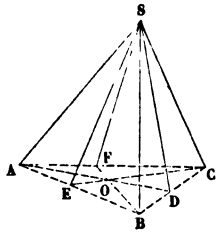
§ IV et V. — Angles trièdres, angles polyèdres. — Propositions diverses.

417. Dans tout angle trièdre SABC, les plans perpendiculaires à ses faces et passant par les trois bissectrices des angles plans de ce trièdre se coupent suivant une même droite. (On s'appuiera sur la question 403.)

418. Dans tout angle trièdre SABC (*fig.* 16), les plans menés par les arêtes perpendiculairement aux faces opposées se coupent suivant une même droite. (Soient SAD, SCE les plans menés par SA, SC, perpendiculairement aux faces SBC,

SBA, et qui coupent ces faces suivant les droites SD, SE, et supposons que d'un point quelconque B de l'arête SB on abaisse sur SD et sur SE les perpendiculaires BDC, BEA, et qu'on joigne AC, AD, CE; les droites AD, CE, qui se coupent en O, sont deux hauteurs du triangle ABC, et par conséquent BOF est la troisième hauteur; alors la question revient à démontrer que le plan SBF est perpendiculaire à la face SAC; etc.)

Fig. 16.



Remarque. — Cette proposition n'est plus vraie lorsque l'angle trièdre est trirectangle.

419. Dans tout angle trièdre, les plans bissecteurs des angles dièdres se coupent suivant une même droite.

420. Dans tout angle trièdre, les plans menés par les arêtes et les bissectrices des faces opposées se coupent suivant une même droite. (On procédera comme dans la question 418, seulement on aura à considérer les trois médianes du triangle ABC.)

Observation. — On voit sans peine que les quatre propositions précédentes sont analogues à quatre propositions de la Géométrie plane.

421. Si, par le sommet d'un angle trièdre, on mène dans chaque face une perpendiculaire à l'arête opposée, ces trois perpendiculaires sont dans un même plan. (Car chacune des perpendiculaires est aussi perpendiculaire à l'intersection SO des trois plans, menés par les arêtes perpendiculairement aux faces opposées.)

422. Couper un angle polyèdre à quatre faces SABCD par un plan, de manière que la section soit un parallélogramme. (Le plan de la section doit être parallèle au plan déterminé par les intersections des faces opposées de l'angle polyèdre.)

423. Tout plan, perpendiculaire à l'une des arêtes d'un angle trièdre rectangle, coupe cet angle trièdre suivant un triangle rectangle.

424. Quel est le lieu des points équidistants des trois arêtes

d'un angle trièdre; le lieu des points équidistants des trois faces?

425. Une droite fait des angles égaux avec deux plans qui se coupent, lorsqu'elle les rencontre en deux points également distants de leur intersection.

426. La projection d'un angle droit sur un plan est un angle droit, lorsque l'un des côtés de l'angle est parallèle au plan de projection.

427. Si les côtés AB, AC d'un angle A rencontrent un plan en B et C, cet angle est plus petit que sa projection sur le plan.

Remarque. — Par conséquent, en prolongeant le côté BA au delà du sommet A, l'angle formé par le prolongement AA′ et par le côté AC est plus grand que sa projection.

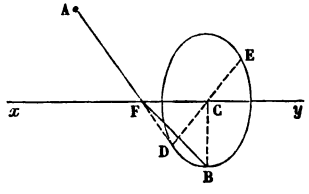
DIFFÉRENTES QUESTIONS SUR CE LIVRE V.

428. Étant donnés deux points A et B situés d'un même côté d'un plan P, trouver sur ce plan un point tel que la somme de ses distances aux points A et B soit un *minimum*.

429. Étant donnés deux points A et B situés de part et d'autre d'un plan P, trouver sur ce plan un point tel que la différence de ses distances aux points A et B soit un *maximum*.

430. Étant donnés une droite xy (*fig.* 17) et deux points A, B, non situés dans un même plan avec la droite, trouver sur xy un point tel, que la somme de ses distances aux points A et B soit un *minimum*. (Par le point B menons un plan perpendiculaire à xy, qui coupe cette droite au point C, et du point C comme centre, avec le rayon CB, décrivons dans ce plan une circonférence, puis, par le point A et la droite xy, faisons

Fig. 17.

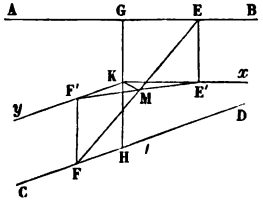


passer un plan qui coupe le plan perpendiculaire à xy, suivant le diamètre DCE, et, en supposant A et D situés de part et d'autre de xy, menons la droite AD, qui coupe xy au point F: alors le point F sera le point cherché. Car la partie FD de la droite AFD est égale à FB, puisque xy est l'axe de la circonférence CB; donc AF + FB est un *minimum*.)

431. Étant donnés une droite xy et deux points A, B, non situés dans un même plan avec la droite, trouver sur xy un point tel, que la différence de ses distances aux points A et B soit un *maximum*. (Marche analogue à celle qu'on a suivie pour la question précédente.)

432. Étant données deux droites AB, CD (*fig.* 18), rectangulaires et non situées dans le même plan, quel est le lieu géométrique du milieu M d'une droite EF, de longueur constante, dont les extrémités sont assujetties à rester sur les droites AB et CD?

Fig. 18.



(Soient GH la plus courte distance des droites AB, CD, et K le milieu de GH, puis menons du point K deux droites Kx, Ky, respectivement parallèles à AB et à CD, enfin menons EE' perpendiculaire à Kx et FF' perpendiculaire à Ky, joignons le point E' au point F', et le point K au point M, qui est situé sur E' F'. Cela posé, on fera voir que le point M est le milieu de E' F', et que E' F', hypoténuse du triangle rectangle K E' F', a une longueur constante; donc le lieu cherché est une circonférence qui a pour centre le point K et pour rayon la droite KM.)

433. Soient SABC un angle trièdre et ASa, BSb, CSc les angles que les arêtes SA, SB, SC font avec les faces opposées; démontrer que la somme de ces angles est moindre que la somme des trois faces ASB, BSC, CSA, et plus petite que la moitié de cette somme. (D'abord on a

$$AS\,a < ASB,\ BS\,b < BSC,\ CS\,c < CSA$$

et par suite

$$AS\,a + BS\,b + CS\,c < ASB + BSC + CSA.$$

Maintenant, en désignant par SO l'intersection des trois plans SAa, SBb, SCc, et en considérant l'angle trièdre SABO, on a

$$ASB < ASO + BSO,$$
$$ASB < ASa + BSb;$$

de même

$$BSC < BSb + CSc,$$
$$CSA < CSc + ASa, \text{ etc.})$$

434. Lorsqu'une droite AB et un plan MN se coupent, en B par exemple, une droite CD perpendiculaire au plan MN et un plan PQ perpendiculaire à la droite AB se coupent aussi.

(Car, si la droite CD et le plan PQ ne se coupaient pas, le plan serait parallèle à la droite CD, et par suite il serait perpendiculaire au plan MN; alors la droite BA, perpendiculaire au plan PQ, devrait être située dans le plan MN, ce qui est contraire à l'hypothèse.)

435. Trouver un point O également distant de quatre points donnés, A, B, C, D, non situés dans le même plan.

(D'abord le point O doit se trouver sur l'intersection Ex des plans perpendiculaires sur les milieux des côtés BC, CD; de plus, il doit se trouver sur le plan MN perpendiculaire sur le milieu de la droite AB; donc le point d'intersection de la droite Ex et du plan MN est le point O cherché.)

Remarque. — Ce problème, énoncé et démontré autrement, se trouve dans le Livre VII de nos *Éléments de Géométrie*, page 263, n° 504.

436. Couper par un plan un angle trièdre trirectangle, de manière que la section soit égale à un triangle donné.

(Soient S le sommet de l'angle trièdre et ABC la section demandée; si, du sommet A, on abaisse sur BC la perpendiculaire AD, la projection SD de AD sur le plan SBC sera aussi perpendiculaire à BC. Alors, puisque le triangle ABC est donné, on connaît dans le triangle rectangle SBC l'hypoténuse BC et le pied D de la perpendiculaire SD, qui n'est autre que le pied de la perpendiculaire AD; donc il est facile de construire le triangle SBC; etc.)

QUESTIONS SUR LE LIVRE VI.

CHAPITRE I.

§ I. — Sur le prisme et plus particulièrement sur le parallélipipède.

437. Deux prismes triangulaires sont égaux lorsqu'ils ont leurs faces latérales égales chacune à chacune et semblablement disposées.

438. Deux prismes sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre une base et une face latérale, égales chacune à chacune et semblablement disposées.

439. La surface latérale d'un prisme a pour mesure le périmètre de sa section droite, multipliée par son arête latérale.

440. Dans tout prisme triangulaire, l'aire de la plus grande face latérale est plus petite que la somme des deux autres.

441. Si la base ABC d'un prisme triangulaire ABCA'B'C' est rectangle en A, le carré de la face qui a pour côté l'hypoténuse BC est égal à la somme des carrés des deux autres faces.

Remarque. — Cette proposition tient à ce que les faces du prisme sont proportionnelles aux côtés de la base.

442. Dans tout parallélipipède, les angles dièdres opposés sont égaux et les angles trièdres opposés sont symétriques.

443. Couper un parallélipipède par un plan, de manière que la section soit un losange.

444. Les diagonales d'un parallélipipède rectangle sont égales. Réciproquement, si les diagonales d'un parallélipipède sont égales, ce parallélipipède est rectangle. (Pour démontrer cette réciproque, on peut remarquer que la pyramide, formée en joignant le point O d'intersection des diagonales aux sommets d'une face quelconque ABCD, a une base inscriptible dans un cercle, et que, par suite, ABCD est un rectangle.)

445. Dans tout prisme quadrangulaire, la somme des carrés des arêtes est égale à la somme des carrés des diagonales, plus huit fois le carré de la droite qui joint le milieu de deux de ces diagonales au milieu des deux autres. Application au parallélipipède.

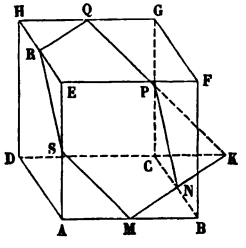
446. La somme des distances des sommets d'un parallélipipède à un plan, qui lui est extérieur, est égale à huit fois la distance du point d'intersection des diagonales au même plan.

447. Quel est le lieu des points d'un plan, tels que la somme des carrés des distances de chacun d'eux aux sommets d'un parallélipipède soit égale à un carré donné? Condition de possibilité du problème.

448. Construire un cube, connaissant sa diagonale.

449. Couper un cube ABCDEFGH (*fig.* 19) par un plan, de manière que la section soit un hexagone régulier. (Faisant abstraction des six arêtes du cube partant des sommets D et F, par exemple, il reste les six arêtes AB, BC, CG, GH, HE, EA, et si l'on joint les points milieux consécutifs M, N, P, Q, R, S de ces arêtes, on aura l'hexagone cherché.

Fig. 19.



1° Cet hexagone a ses côtés dans un même plan; car les côtés MN, PQ prolongés se rencontrent en un même point K de l'arête DC.

2° On voit facilement que les côtés de l'hexagone sont égaux.

3° Les angles sont aussi égaux; car l'angle MNP, par

exemple, vaut $\frac{4}{3}$ de droit, comme étant le supplément de l'angle PNK, qui vaut $\frac{2}{3}$ de droit, à cause du triangle NPK qui est équilatéral, vu qu'on a PK = PQ = PN = NK.

Autre manière de démontrer que la section est un hexagone régulier :

1° Les six sommets de la section étant également distants des sommets D et F, cette section est plane et son plan est perpendiculaire sur le milieu O de la diagonale DF.

2° Les côtés MN, NP, PQ, ... sont égaux.

3° Les six triangles OMN, ONP, ... sont équilatéraux.

Donc la section est un hexagone régulier qui a pour centre le point O.)

§ II. — Sur la pyramide et plus particulièrement sur le tétraèdre.

450. Deux tétraèdres sont égaux : 1° lorsqu'ils ont une face égale adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés; 2° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées; 3° lorsqu'ils ont un angle trièdre égal, compris entre trois arêtes égales chacune à chacune et semblablement disposées; 4° lorsqu'ils ont leurs six arêtes égales chacune à chacune, et semblablement disposées.

451. Par un point D, pris sur l'une des arêtes SA d'un tétraèdre SABC, on mène un plan parallèle aux deux arêtes opposées SB, AC; démontrer que la section faite par ce plan est un parallélogramme. Si le point D est le milieu de SA, la section sera également distante des arêtes SB, AC.

452. Dans un tétraèdre, les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées se coupent mutuellement en parties égales.

453. Si, dans un tétraèdre SABC, les arêtes opposées SA, BC sont perpendiculaires entre elles, les hauteurs du tétraèdre issues des sommets S et A se coupent, et réciproquement.

454. Si la hauteur SO d'un tétraèdre SABC rencontre la face ABC au point O d'intersection des trois hauteurs de cette face, les arêtes opposées du tétraèdre sont perpendiculaires entre elles deux à deux.

455. Lorsque dans un tétraèdre les arêtes opposées sont perpendiculaires entre elles deux à deux, les quatre hauteurs du tétraèdre se coupent en un même point. Si un tétraèdre SABC a un angle trièdre trirectangle S, ses arêtes opposées sont perpendiculaires deux à deux, et le point d'intersection des quatre hauteurs est le point S.

456. Les plans, perpendiculaires sur les milieux des arêtes d'un tétraèdre, se coupent en un même point.

457. Par un point quelconque, pris à l'intérieur de la base d'une pyramide régulière, on élève une perpendiculaire sur cette base; cette perpendiculaire rencontre toutes les faces de la pyramide prolongées au besoin. Démontrer que la somme des distances des points de rencontre au plan de la base est une quantité constante.

458. La base d'une pyramide régulière est un triangle équilatéral dont le côté est a; la hauteur de la pyramide est égale à $2a$; à quelle distance de la base ABC faut-il mener un plan DEF parallèle à cette base pour que la surface du triangle DEF soit égale à la surface latérale du tronc ABCDEF?

459. Évaluer la surface de la section faite dans un tronc de pyramide triangulaire par un plan mené parallèlement aux bases et à égale distance de ces bases.

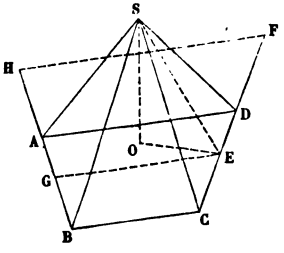
460. Par la droite DE, qui joint les milieux de deux arêtes opposées SA, BC d'un tétraèdre SABC, on mène un plan quelconque qui coupe SB au point F et AC au point G; démontrer que la droite FG est divisée par la droite DE en deux parties égales. (Si, par la droite DE on mène le plan également distant des arêtes SB, AC, les perpendiculaires abaissées des points F et G sur ce plan seront égales, et il en sera de même des perpendiculaires FF′, GG′, abaissées des points F et G sur DE, etc.)

461. Couper un tétraèdre SABC par un plan P parallèle aux deux arêtes opposées SB, AC, de manière que la section DEFG soit un *maximum*. (Toute section faite par un plan parallèle aux arêtes SB, AC est un parallélogramme, tel que DEFG, dont l'angle DEF est égal à celui des arêtes SB, AC; donc la section sera un maximum en même temps que le produit DE.DF, etc.)

462. On a un tétraèdre SABC et, par la droite DE, qui joint les milieux des arêtes opposées SA, BC, on mène un plan qui coupe les arêtes SB, AC aux points F et G; quelle doit être la position du plan pour que la surface de la section DFEG soit un minimum? (En abaissant les perpendiculaires FF′, GG′ sur DE, la section a pour mesure $DE\,\frac{FF'+GG'}{2}$, dont le facteur DE est constant, et il s'agit de trouver dans quel cas la somme FF′ + GG′ est un minimum. Or, si l'on mène par DE le plan DHEK, parallèle aux arêtes SB, AC, et qui est également distant de ces arêtes, les droites FF′, GG′ sont égales et parallèles (*voir* quest. 460), et ces droites sont, en général, obliques au plan DHEK, etc.)

463. Construire une pyramide quadrangulaire SABCD (*fig.* 20), qui a pour base un trapèze ABCD, connaissant : 1° la face SAB; 2° les directions des arêtes parallèles AD, BC; 3° les angles de la face SCD. (Du sommet S abaissons SO, perpendiculaire au plan de la base, lequel est connu de position, menons OE perpendiculaire au côté DC et joignons SE; alors cette dernière droite sera la hauteur de la face SCD, et, comme le triangle SCD est donné d'*espèce* ou de *forme*, on connaît les rapports de CE à ED et de CE à SE. Donc, si l'on prolonge CE d'une longueur EF égale à SE, qu'on mène par le point E une parallèle à CB, rencontrant AB au point G, et, par le point F, une seconde parallèle à CB, rencontrant AB au point H, on aura

Fig. 20.



$$\frac{BG}{BA}=\frac{CE}{DC} \quad \text{et} \quad \frac{BG}{GH}=\frac{CE}{SE},$$

et, par conséquent, on connaît les points G et H et les positions des deux parallèles GE et HF.

D'ailleurs, en menant SF, on a

$$\overline{SF}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{OF}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{OE}^2 + \overline{EF}^2 = 2\overline{EF}^2;$$

donc

$$\overline{EF}^2 - \overline{OE}^2 = \overline{SO}^2.$$

Ainsi l'on connaît le sommet O du triangle OEF rectangle en E, et, de plus, les sommets E et F doivent se trouver sur les parallèles GE et HF; donc on peut construire ce triangle. (*Voir* quest. 337, *Rem.*), et par conséquent le problème est résolu.)

464. Couper par un plan un prisme triangulaire SABS'A'B', de manière que la section SCD soit semblable à un triangle donné. (Cette question revient à construire la pyramide SABCD, et l'on est ramené au problème précédent.)

465. La surface latérale d'une pyramide régulière a pour mesure le périmètre de sa base, multiplié par la moitié de son apothème.

466. On a une pyramide SABCD, dont la base ABCD est un losange et dont la hauteur SO rencontre la base au point d'intersection O de ses diagonales; trouver la surface latérale de cette pyramide, sachant qu'on a

$$AC = a, \quad BD = b \quad \text{et} \quad SO = c.$$

CHAPITRE II.

§ I. — Sur la mesure des parallélipipèdes et des prismes.

467. Sans se fonder sur les mesures du parallélipipède et du prisme triangulaire, démontrer les quatre théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Le plan, mené par deux arêtes opposées d'un parallélipipède, divise ce parallélipipède en deux prismes triangulaires équivalents.* (*On voit d'abord que ces deux prismes sont superposables, lorsque le parallélipipède est droit; etc.*)

THÉORÈME II. — *Deux parallélipipèdes* ABCDEFGH, ABCDKLMN *sont équivalents lorsqu'ils ont même base inférieure* ABCD, *et leurs bases supérieures comprises entre les mêmes parallèles* EFKL, GHNM. (*Les deux prismes triangulaires* AEKDHN, BFLCGM *sont superposables, et si on les retranche successivement du prisme quadrangulaire qui a pour bases* ABLE, DCMH, *les restes sont équivalents.*)

THÉORÈME III. — *Deux parallélipipèdes* ABCDEFGH, ABCDKLMN *sont équivalents lorsqu'ils ont même base* ABCD *et même hauteur.* (*En prolongeant* EF, GH, *ainsi que* NK, ML, *ces arêtes formeront par leurs intersections un parallélogramme* PQRS *qu'on peut regarder comme la base supérieure d'un parallélipipède* ABCDPQRS, *et ce troisième parallélipipède sera équivalent à chacun des deux premiers, d'après le théorème précédent.*)

THÉORÈME IV. — *Tout parallélipipède oblique* ABCDEFGH *est équivalent à un parallélipipède droit* ABCDKLMN *de même base* ABCD *et de même hauteur. De plus, il est équivalent à*

un parallélipipède rectangle de même hauteur et de bases équivalentes.

Remarque. — Les trois premiers de ces théorèmes font partie des *Éléments de Géométrie* d'Euclide (Livre XI, propositions 28, 29, 30.)

Legendre a démontré ces trois mêmes théorèmes, ainsi que le quatrième, et, après avoir établi la mesure du parallélipipède rectangle, il se fonde sur les théorèmes IV et I pour obtenir les mesures d'un parallélipipède quelconque et d'un prisme quelconque.

468. Vérifier par la Géométrie les formules qui donnent les cubes de $a+b$ et de $a-b$; la formule

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

469. Par une droite donnée, mener un plan qui divise un parallélipipède en deux parties équivalentes.

470. Si, du sommet de l'angle droit d'un triangle ABC, rectangle en A, on abaisse sur l'hypoténuse la perpendiculaire AD et qu'on projette les deux segments de l'hypoténuse sur les côtés de l'angle droit adjacents à ces segments.

1° Les cubes construits sur les côtés de l'angle droit seront entre eux comme les projections BE, CF des segments de l'hypoténuse sur les côtés AB, AC;

2° Le cube construit sur la hauteur AD sera équivalent au parallélipipède qui aurait pour dimensions l'hypoténuse et les projections BE, CF, des segments de cette hypoténuse;

3° Les perpendiculaires DE, DF, abaissées du pied de la hauteur AD sur les côtés de l'angle droit, sont deux moyennes proportionnelles entre les projections BE, CF des segments de l'hypoténuse, en sorte qu'on a

$$\frac{BE}{DE}=\frac{DE}{DF}=\frac{DF}{CF}.$$

471. Sur trois parallèles, non situées dans le même plan, on prend trois points quelconques A, B, C, puis trois droites AA′, BB′, CC′, dirigées dans le même sens et égales chacune à une droite donnée. Démontrer que le volume du prisme triangulaire ABCA′B′C′ est constant, quelles que soient les positions respectives des points A, B, C.

472. Étant donné un prisme triangulaire, on mène le plan bissecteur d'un des dièdres latéraux; dans quel rapport le prisme est-il divisé par ce plan?

473. Sur les faces SAB, SBC, SCA d'un tétraèdre SABC, comme bases, on construit trois prismes, tels que les plans des trois autres bases passent en un certain point O. Démontrer que le prisme, ayant pour base la quatrième face ABC du tétraèdre, et pour arêtes latérales des droites égales et parallèles à la droite OS, est équivalent à la somme des trois premiers prismes. (Soient DEF la seconde base du prisme construit sur ABC et GHK la seconde base du prisme construit sur SBC; prolongeons la droite OS qui rencontre les bases ABC, DEF aux points M et N, et menons les droites MA, MB, MC, ND, NE, NF : on décomposera ainsi le prisme ABCDEF en trois prismes partiels qui seront respectivement équivalents aux prismes construits sur SAB, SBC, SCA. Par exemple, démontrer que le prisme MBCNEF est équivalent au prisme SBCGHK.)

§ II. — Sur la mesure de la pyramide, du tronc de pyramide, du tronc de prisme triangulaire.

474. On joint le centre d'un parallélipipède aux quatre sommets de l'une des faces; quel est le rapport du volume de la pyramide ainsi formée au volume du parallélipipède?

475. Évaluer la surface et le volume de l'octaèdre qui a pour sommets les centres des faces d'un parallélipipède rectangle.

476. Si un tétraèdre SABC a un angle trièdre trirectangle S et qu'on désigne par a, b, c les arêtes SA, SB, SC qui comprennent cet angle, par p la perpendiculaire abaissée du sommet S sur la face ABC, on aura

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

477. Si l'on prend un point O dans l'intérieur d'un té-

traèdre SABC, et qu'on prolonge les droites SO, AO, BO, CO, jusqu'à la rencontre des faces opposées en S', A', B', C', on a la relation

$$\frac{OS'}{SS'} + \frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1.$$

478. Par le sommet S d'un tétraèdre SABC on mène la droite SD, dont tous les points sont également distants des faces, SAB, SBC, SCA, et qui rencontre la base ABC au point D. Démontrer que les triangles DAB, DBC, DCA sont proportionnels aux faces SAB, SBC, SCA.

479. Le plan bissecteur SAD de l'angle dièdre SA d'un tétraèdre SABC divise l'arête opposée en deux segments BD, DC, proportionnels aux faces adjacentes SAB, SAC. Considérer le plan bissecteur de l'angle dièdre extérieur CSAB'.

480. Étant donné un prisme triangulaire ABCA'B'C', on mène un plan par l'un des côtés AB de la base inférieure et par le milieu D du côté A'C' de la base supérieure; déterminer dans quel rapport ce plan divise le volume du prisme. (On remarquera d'abord que ce plan passe par le milieu de B'C', et qu'il divise la diagonale B'C en deux parties dont l'une est double de l'autre; etc.)

481. Déterminer à l'intérieur d'un tétraèdre un point tel, qu'en le joignant aux différents sommets, on décompose le tétraèdre en quatre pyramides triangulaires équivalentes.

482. Étant données trois droites parallèles et non situées dans le même plan, on prend sur l'une d'elles deux points fixes A et B, puis sur la seconde un point quelconque C, et sur la troisième un point quelconque D. Démontrer :

1° Que le volume du tétraèdre ABCD est constant pour toutes les positions des points C et D;

2° Que le volume est proportionnel à la droite AB;

3° Que ce volume reste encore le même, quelle que soit la parallèle sur laquelle on prend la longueur AB.

483. Trouver l'expression du volume d'un tronc de pyramide quelconque, à bases parallèles, en le décomposant en troncs de pyramides triangulaires.

484. Exprimer la mesure d'un tronc de pyramide ABCDEFGH en fonction de sa hauteur h, de sa base ABCD ou B, et du rapport K de deux côtés homologues EF et AB des bases. [V désignant le volume du tronc de pyramide, on a

$$V = \frac{Bh}{3}(1 + K + K^2).]$$

485. On a une pyramide SABCD et l'on mène un plan parallèle à la base ABCD, qui coupe les prolongements des arêtes AS, BS, CS, DS, au delà du sommet, aux points E, F, G, H. Démontrer que la somme des deux pyramides SABCD, SEFGH a pour mesure

$$\frac{h}{3}(B + b - \sqrt{Bb}),$$

en désignant par h la distance des deux plans parallèles, par B la base ABCD, et par b la base EFGH. [Si l'on désigne ce volume par V et par K le rapport de EF à AB, on a

$$V = \frac{Bh}{3}(1 - K + K^2).]$$

Remarque. — Des auteurs, inspirés sans doute par la loi de continuité, appellent *tronc de pyramide de seconde espèce* le volume composé de deux pyramides, ayant le même sommet des bases parallèles, situées de part et d'autre du sommet, et telles, que les arêtes de l'une soient les prolongements des arêtes de l'autre; mais nous ne croyons pas devoir admettre cette nouvelle dénomination, qui nous semble dénaturer singulièrement le sens qu'on attache ordinairement au mot *tronc de pyramide* en le regardant comme étant essentiellement une portion de la pyramide à laquelle il appartient. D'ailleurs, après avoir admis cette dénomination, pourquoi ne serait-on pas conduit, par analogie, à distinguer des trapèzes de *première* et de *seconde espèce?* Et nous ne voyons pas d'utilité réelle à introduire ces néologismes dans les *Éléments de Géométrie.*

486. Quelle est la différence des volumes d'un tronc de pyramide et d'un prisme de même hauteur, ayant pour base la demi-somme des bases du tronc de pyramide? Quelle serait l'erreur commise, si l'on prenait, pour mesure d'un tronc de pyramide, un prisme de même hauteur, ayant pour base la section du tronc de pyramide, faite par un plan parallèle aux bases, et également distant de ces bases?

487. On mène le plan bissecteur d'un des dièdres latéraux d'un tronc de pyramide triangulaire, quel est le rapport des volumes des deux troncs partiels?

488. Tout plan passant par les milieux D, E de deux arêtes opposées SA, BC d'un tétraèdre SABC divise ce tétraèdre en deux parties équivalentes.

[D'abord ce plan, divisant les côtés opposés SA, CB du quadrilatère gauche SACBS en deux parties égales, divise aussi les deux autres côtés AC, BS, en parties proportionnelles aux points F et G (*voir* nos *Éléments de Géométrie*, p. 464, Rem. III), en sorte qu'on a

$$\frac{CF}{CA} = \frac{BG}{BS}.$$

Ensuite, les deux polyèdres SDGEFC, ADFEGB se composent de deux pyramides quadrangulaires SDGEF, ADGEF, qui sont équivalentes, comme ayant pour base commune la section DGEF, et des hauteurs égales, puisque le point D est le milieu de SA. D'ailleurs les deux polyèdres en question se composent en outre, l'un du tétraèdre SEFC, et l'autre du tétraèdre AEGB; or, ces deux tétraèdres sont équivalents. On le démontre en remarquant que le tétraèdre SEFC et le tétraèdre total SABC ont l'angle trièdre C commun, et qu'on a par conséquent (*Élém.*, p. 219, coroll. II)

$$\frac{SEFC}{SABC} = \frac{CS.CE.CF}{CS.CB.CA} = \frac{CF}{2CA};$$

de même

$$\frac{AEGB}{SABC} = \frac{BA.BE.BG}{BA.BC.BS} = \frac{BG}{2BS}; \text{ etc.}]$$

489. Le volume V de tout polyèdre, compris sous deux bases parallèles et sous des faces latérales qui sont des trapèzes, est donné par la formule

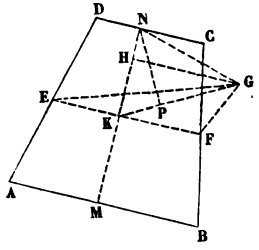
$$V = \frac{h}{6}(B + B' + 4B''),$$

en désignant par h la distance des deux bases, par B et B' les

surfaces de ces bases, et par B″ la section équidistante de ces mêmes bases.

[Soient ABCD (*fig.* 21) l'un des trapèzes qui forment la surface latérale du polyèdre, EF la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles, EFG le plan de la section équidistante des deux bases, et G un point pris dans l'intérieur de cette section, puis supposons qu'on joigne le point G aux différents sommets du polyèdre : alors le polyèdre se compose d'abord de deux pyramides qui ont pour bases celles du polyèdre, et pour hauteur $\frac{h}{2}$, et la somme de ces deux pyramides a pour mesure

Fig. 21.



$$\frac{h}{6}(B+B').$$

Maintenant, si du point G on abaisse GH perpendiculaire à la face ABCD, et qu'on mène la droite HK perpendiculaire à EF, cette droite sera aussi perpendiculaire à GK, et elle rencontrera AB en un point M, et CD en un point N, et la pyramide GABCD aura pour mesure

$$\frac{1}{3}\,GH.EF.2NK;$$

mais le plan NKG est perpendiculaire à EF, et par suite au plan EFG; donc la droite NP perpendiculaire à KG est égale à $\frac{h}{2}$, et d'ailleurs les produits GH.NK et GK.NP sont égaux, comme étant chacun le double de la mesure du triangle NKG ; donc la mesure ci-dessus devient

$$\frac{1}{3}\,GK.EF.h$$

ou

$$\frac{h}{6}\times 4GEF$$

Ainsi la somme des pyramides, qui ont pour sommet commun le point G et pour bases les faces latérales du polyèdre,

a pour mesure le produit $\frac{h}{6}$ multiplié par 4 fois la somme des triangles qui composent la section.

Donc on a bien la formule

$$V = \frac{h}{6}(B + B' + 4B'').]$$

Remarque. — Si des faces latérales sont des triangles, on peut les regarder comme des trapèzes dont l'une des bases est nulle, et la formule ne change pas.

490. Étant donné un polyèdre ayant deux bases rectangulaires et parallèles ABCD, EFGH, et pour faces latérales des trapèzes, on demande :

1° D'évaluer le volume V de ce polyèdre, connaissant les dimensions des deux bases et la distance de ces bases;

2° D'indiquer la condition qui doit être remplie pour que le polyèdre soit un tronc de pyramide.

[Pour trouver le volume V, on pourrait mener par les arêtes DC, EF un plan qui décomposerait le polyèdre en deux troncs de prismes triangulaires, dont on connaîtrait les sections droites et les arêtes latérales, mais il est plus simple de se fonder sur la question précédente. Des deux manières on trouve la formule

$$V = \frac{bh}{6}(2a + a') + \frac{b'h}{6}(2a' + a),$$

en désignant par h la distance des deux bases, par a, b les dimensions du rectangle ABCD, et par a', b' celles du rectangle EFGH.

En second lieu, il est facile de voir que le polyèdre est un tronc de pyramide, lorsque les deux rectangles sont semblables.]

Remarque. — La formule précédente sert à mesurer les volumes des amas de pierre et des fossés ou cuvettes établis le long des routes; car ces volumes ont la forme de prismes quadrangulaires tronqués dont deux faces latérales opposées sont rectangulaires et parallèles et dont les autres faces opposées sont des trapèzes isoscèles.

Si les deux trapèzes isoscèles égaux qui servent de bases à l'un de ces troncs de prismes quadrangulaires deviennent des triangles isoscèles égaux, le tronc de prisme quadrangulaire devient un tronc de prisme

triangulaire, et, pour avoir son volume, il suffit de faire $b' = 0$ dans la formule, qui se réduit à

$$V = \frac{bh}{6}(2a + a').$$

Ce prisme triangulaire a la forme qu'on donne aux toits de certains édifices, aux piles de boulets rectangulaires dans les parcs d'artillerie, etc.

491. Calculer le volume d'un tétraèdre SABC en fonction de ses arêtes, dans le cas où les arêtes SA, SB, SC sont égales. (En désignant par V ce volume, par S la surface de base ABC, par h la hauteur, par a, b, c les côtés BC, AC, AB de la base, par d la longueur commune des arêtes SA, SB, SC, et enfin par R le rayon du cercle circonscrit à ABC, on aura

$$V = \frac{1}{3} S h.$$

Or, la surface S est donnée par la formule

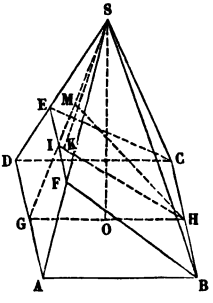
$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)};$$

d'ailleurs $R = \frac{abc}{4S}$ et $h^2 = d^2 - R^2$; et si, dans la première formule $V = \frac{1}{3} S h$, on remplace S et h par leurs valeurs, il vient

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)d^2 - a^2b^2c^2}.$$

492. Partager une pyramide quadrangulaire régulière SABCD en deux parties équivalentes (*fig.* 22), au moyen d'un plan passant par l'un des côtés BC de la base. (Par la hauteur SO menons un plan perpendiculaire sur les milieux G et H des arêtes AD, BC, qui coupe la section BCEF, suivant la droite HI et la face SDA, suivant la droite SIG; ce plan étant perpendiculaire à la droite BC sera perpendiculaire à la section, et, par conséquent, si du sommet S on abaisse SK perpendiculaire sur HI, elle sera aussi perpendiculaire à la section; enfin, abaissons du point H la perpendiculaire HM sur SG.

Fig. 22.



Les volumes des pyramides SABCD et SBCEF ont respectivement pour mesures $\frac{1}{3}\,AD^2.SO$ et $\frac{1}{3}\,\frac{BC+EF}{2}\cdot IH.SK$, et, d'après la condition du problème, on doit avoir

$$\overline{AD}^2.SO = (BC+EF).IH.SK.$$

Mais $AD.SO = GH.SO = SG.HM$ et $IH.SK = SI.HM$; ainsi l'égalité précédente devient

$$AD.SG = (AD+EF).SI,$$

et, si l'on remplace $AD.EF$ par les longueurs proportionnelles SG, SI, on a, en définitive

$$\frac{SG}{SI} = \frac{SI}{SG-SI};$$

d'où l'on voit que le plan cherché doit diviser l'apothème SG en moyenne et extrême raison.

CHAPITRE III.

§ I et II. — Sur les figures symétriques.

Observation. — Les questions suivantes sont résolues dans la Note 69 de nos *Éléments*.

493. Deux figures F, F′, symétriques par rapport à un axe xy, sont égales.

494. Deux figures F′ et F″, symétriques d'une même figure F par rapport à deux centres différents O et O′, sont égales.

495. Lorsque deux figures F, F′ sont symétriques par rapport à un plan MN, si l'une de ces figures, F par exemple, tourne de 180 degrés autour d'un axe xy, perpendiculaire à MN, elle sera, dans sa nouvelle position, symétrique de la figure F par rapport au point d'intersection O de l'axe avec le plan.

Et réciproquement : Si deux figures F, F′ sont symétriques par rapport à un point O, et qu'on fasse tourner la figure F′ de 180 degrés autour d'un axe xOy, cette figure sera, dans sa nouvelle position, symétrique de la figure F par rapport au plan MN, perpendiculaire à xy au point O.

496. Si deux points A, A′ et deux plans PQ, PQ′ sont symétriques par rapport à un plan MN, les deux points sont respectivement à la même distance des deux plans.

497. Le plan qui passe par deux arêtes opposées d'un parallélipipède divise ce parallélipipède en deux prismes triangulaires symétriques.

498. Quels sont les *axes de symétrie* d'un parallélipipède

droit, d'un parallélipipède rectangle, d'un parallélipipède rectangle dont la base est un carré? Tout parallélipipède a un *centre de symétrie*. Un parallélipipède droit a un *plan de symétrie*, et il en a trois si sa base est un losange.

499. L'axe d'une pyramide régulière est un axe de symétrie, lorsque la base de la pyramide a un nombre pair de côtés.

CHAPITRE IV.

§ I et II. — Sur les polyèdres semblables.

500. Deux pyramides quelconques sont semblables lorsqu'elles ont un angle dièdre égal, compris entre une base et une face latérale semblables chacune à chacune et semblablement disposées.

501. Si deux tétraèdres semblables ont leurs faces homologues parallèles chacune à chacune, les droites menées par leurs sommets homologues concourent en un même point.

502. Si, par les sommets d'un tétraèdre, on mène des plans parallèles aux faces opposées, le tétraèdre formé par ces plans est-il semblable au premier? (Non, ces deux tétraèdres ont leurs faces semblables chacune à chacune, mais leurs angles trièdres sont symétriques.)

503. Couper une pyramide par un plan parallèle à sa base, de manière que la surface de la pyramide partielle soit à la surface de la pyramide totale comme m est à n.

504. Si quatre polyèdres semblables ont leurs arêtes homologues proportionnelles aux nombres 3, 4, 5, 6, le plus grand est équivalent à la somme des trois autres.

CHAPITRE V.

Sur les polyèdres réguliers.

505. Calculer le volume d'un tétraèdre régulier dont l'arête est a.

506. Les centres des faces d'un tétraèdre régulier sont les sommets d'un autre tétraèdre régulier *conjugué* du premier. (Deux polyèdres réguliers sont dits *conjugués* lorsque les centres des faces de l'un de ces polyèdres sont les sommets de l'autre.)

507. Le cube ou l'hexaèdre régulier a pour conjugué un octaèdre régulier.

508. Les milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier sont les sommets d'un octaèdre régulier.

QUESTIONS SUR LE LIVRE VII.

CHAPITRE I.

§ I, II et III. — Sur le cône, le cône et le tronc de cône.

Sur le cylindre.

509. Quel est le lieu de tous les points de l'espace qui sont à égale distance d'une droite donnée?

510. Couper un cylindre par un plan parallèle à l'axe, de manière que la section soit égale au rectangle générateur du cylindre.

511. On suppose qu'une des faces ABB'A' d'un prisme droit ABCDEA'B'C'D'E' coïncide avec un plan P, et qu'on fasse tourner le prisme autour de l'arête BB', de manière que la face BCC'B' coïncide avec le plan P, et l'on continue ainsi jusqu'à ce que toutes les faces du prisme se soient placées successivement sur le plan P. Démontrer que l'ensemble des faces situées sur le plan forme un rectangle, et en déduire la mesure de la surface latérale du prisme. (Ce rectangle est le *développement* de la surface latérale du prisme sur le plan P ou sur le plan de la face ABB'A'.)

512. Trouver la mesure de la surface latérale d'un cylindre, en considérant cette surface comme étant celle d'un prisme droit qui a pour base un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits, et en la développant sur le plan d'une de ses faces.

513. Couper un cylindre par un plan parallèle à sa base, de manière que la base du cylindre soit moyenne proportionnelle entre les deux parties de la surface latérale. (Il s'agit d'un cylindre droit, à base circulaire, et il en sera de même dans toutes les questions suivantes.)

514. La surface totale d'un cylindre a pour mesure le produit de la circonférence de la base du cylindre par la somme de sa hauteur et du rayon de sa base.

515. Trouver les dimensions d'un cylindre, sachant que sa hauteur est égale à la moitié du rayon de sa base, et que sa surface totale est équivalente à un cercle donné.

516. Diviser une droite en deux parties telles, qu'en prenant l'une pour la hauteur d'un cylindre, et l'autre pour le rayon de sa base, la surface convexe du cylindre soit égale à un cercle donné.

517. Calculer, à un millimètre près, les dimensions du litre qu'on emploie pour les liquides, sachant qu'il a la forme d'un cylindre dont la hauteur est double du diamètre de la base. (On sait que le litre a la capacité d'un décimètre cube.)

518. Calculer, à un millimètre près, les dimensions du litre, du décalitre et de l'hectolitre qu'on emploie pour les graines, sachant qu'ils ont la forme de cylindres dont les hauteurs sont égales aux diamètres des bases.

Sur le cône.

519. Quel est le lieu de toutes les droites, finies et égales entre elles, passant par un point donné, et faisant avec une droite donnée ou avec un plan donné un angle constant?

520. Quel est le lieu des points tels, que les distances de chacun de ces points à un point fixe A et à une droite fixe xy passant par le point A soient entre elles dans un rapport donné?

521. Trouver la mesure de la surface latérale d'une pyra-

mide régulière, en développant cette surface sur le plan de l'une de ses faces. — Trouver de même la mesure de la surface convexe d'un cône, en considérant ce cône comme une pyramide régulière dont la base serait un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

522. Le développement de la surface convexe d'un cône est un secteur circulaire. — Évaluer l'angle de ce secteur. (En désignant par R le rayon de la base du cône, et par R′ son apothème, on connaît la longueur $2\pi R$ de l'arc du secteur et son rayon R′; etc.)

523. Partager la surface latérale d'un cône en m parties équivalentes par des plans parallèles à sa base.

524. Calculer la surface latérale, la surface totale et le volume d'un cône équilatéral en fonction de son côté. (Un *cône équilatéral* est celui dont le côté est égal au diamètre de sa base.)

525. La surface convexe d'un cône équilatéral est double de la surface de sa base.

526. Trouver le volume engendré par un triangle équilatéral tournant autour de l'un de ses côtés, en fonction du côté a de ce triangle.

527. Si l'on fait tourner successivement un triangle rectangle autour de chaque côté de son angle droit, les volumes des deux cônes qu'il engendre sont inversement proportionnels à leurs hauteurs.

528. Les volumes engendrés par un parallélogramme, tournant successivement autour de deux côtés adjacents, sont en raison inverse de ces côtés.

529. Connaissant le rayon de la base et la hauteur d'un cône, déterminer la distance au sommet de ce cône d'un plan parallèle à la base, sachant que ce plan détache du solide un cône dont la surface totale est égale à la surface latérale du cône donné.

530. Inscrire dans un cône un cylindre dont la surface laté-

rale soit égale à celle d'un cercle donné. Quel est le maximum de cette surface? (Ce maximum a lieu lorsque la hauteur du cylindre est la moitié de celle du cône.)

Remarque. — A cette dernière question correspond celle-ci : Circonscrire à un cylindre un cône dont la surface latérale soit un minimum. Ce minimum a lieu lorsque la hauteur du cône est double de celle du cylindre.)

531. Si l'on joint les milieux des deux côtés d'un triangle et qu'on fasse tourner ce triangle autour du troisième côté, quel est le rapport des volumes engendrés par les deux parties du triangle?

Sur le tronc de cône.

532. Évaluer la surface latérale d'un tronc de cône, en la considérant comme la différence des surfaces latérales de deux cônes.

533. Évaluer le volume d'un tronc de cône, en le considérant comme la différence des volumes de deux cônes.

Remarque. — Ces deux questions sont résolues dans les Notes 74 et 75 de nos *Éléments*.

534. Quelles sont les conditions de similitude de deux troncs de cône?

535. Quel est le rapport des volumes de deux troncs de cône semblables?

536. Couper un tronc de cône par un plan parallèle aux bases, de manière que la section soit moyenne proportionnelle entre les bases.

537. Le volume d'un tronc de cône est égal à la somme des volumes d'un cylindre et d'un cône, qui auraient pour hauteur commune celle du tronc et pour bases respectives les cercles dont les rayons seraient la demi-somme et la demi-différence des rayons des bases du cône.

538. Lorsque le côté d'un tronc de cône est égal à la somme

des rayons des bases, la hauteur du tronc est double de la moyenne géométrique entre ces rayons, et de plus le volume du tronc a pour mesure le produit de sa surface totale par le sixième de la hauteur.

539. Un cylindre et un tronc de cône ont une base commune et même hauteur; quel doit être le rapport des rayons des deux bases du tronc de cône pour que le volume du cylindre soit double de celui du tronc de cône?

540. Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône, dont on connaît la hauteur, le côté et la surface convexe.

541. Le volume engendré par un triangle ABC, tournant autour d'un axe extérieur xy, situé dans son plan, a pour mesure la surface de ce triangle, multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de cette surface.

Remarque. — Ce théorème n'est qu'un cas très-particulier d'une proposition connue sous le nom de *théorème de Guldin*, et il est démontré dans la Note 76 de nos *Éléments*.

Observations : 1° *Cubage d'un tronc d'arbre.* — Un tronc d'arbre non équarri a sensiblement la forme d'un tronc de cône à bases parallèles; mais, lorsque les diamètres des deux bases diffèrent peu l'un de l'autre, on l'assimile à un cylindre droit ayant pour base la section faite au milieu de la longueur, parallèlement aux bases. Alors, pour évaluer approximativement le volume, on mesure la circonférence moyenne au moyen d'un cordon métrique, on en déduit le rayon, puis le volume du cylindre.

Ainsi, désignant par C la circonférence moyenne, par R son rayon, par h la longueur du tronc et par V son volume, on aura

$$C = 2\pi R \quad \text{et} \quad V = \pi R^2 h = \frac{C^2 h}{4\pi}.$$

2° *Jaugeage des tonneaux.* — Si l'on considère un tonneau comme la somme de deux troncs de cônes égaux, réunis par leur grande base, la mesure du tonneau est donnée par la formule

$$\frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr),$$

en désignant par h la longueur intérieure du tonneau, par $2R$ le diamètre de la bonde et par $2r$ le diamètre du fond; mais le volume ainsi calculé est trop petit.

En remplaçant le produit Rr par R^2, on obtient cette nouvelle formule

$$\frac{1}{3}\pi h(2R^2+r^2),$$

proposée par Oughtred et employée en Angleterre.

En France, on se sert plus particulièrement de la formule de Dez :

$$\pi h\left[R-\frac{3}{8}(R-r)\right]^2.$$

La formule qui s'adapte le mieux à la formule générale des tonneaux est la suivante :

$$\frac{1}{3}\pi h\left[2R^2-r^2-\frac{1}{3}(R^2-r^2)\right].$$

CHAPITRE II.

§ I, II et III. — Sections planes et plan tangent. — Pôles d'un cercle. — Polyèdres inscrits et polyèdres circonscrits à la sphère.

542. Par un point pris hors d'une sphère on peut mener à cette sphère une infinité de tangentes. Toutes ces tangentes sont égales et le lieu des points de contact est une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la droite qui joint le point donné au centre de la sphère et dont le centre est sur cette droite.

Remarque. — Cette circonférence est la *ligne de contact* entre la sphère et la surface conique formée par toutes ces tangentes.

543. Par une droite donnée, mener un plan tangent à une sphère donnée.

544. Les plans qui touchent deux sphères extérieurement rencontrent la ligne des centres au même point. Il en est de même des plans qui touchent deux sphères intérieurement. Ces deux points sont les *centres* de similitude directe et de similitude inverse des deux sphères.

545. Par un point donné, mener un plan tangent à deux sphères données.

546. La plus petite et la plus grande droite qu'on puisse mener d'un point à la surface d'une sphère sont situées toutes deux sur la droite qui passe par ce point et par le centre de la sphère.

Remarque. — Au moyen de cette proposition on peut démontrer que deux sphères sont tangentes extérieurement, ou extérieures l'une à l'autre, ou tangentes intérieurement, ou intérieures l'une à l'autre, ou sécantes entre elles, selon que la distance des centres est égale à la somme des rayons, ou plus grande que cette somme, ou égale à la

différence des rayons, ou plus petite que cette différence, ou à la fois plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence, et réciproquement.

547. Décrire sur une sphère un petit cercle distant du centre de la sphère d'une longueur donnée. (On décrit sur un plan une circonférence de grand cercle, on mène un rayon OA, on prend sur OA une distance OB égale à la longueur donnée, par le point B on mène une corde CD perpendiculaire à OA, on joint le point A au point C et la distance AC est le rayon sphérique demandé.)

548. Décrire sur une sphère un petit cercle dont la surface soit égale à la moitié de la surface d'un grand cercle.

549. Quel est le lieu des centres des sections faites dans une sphère par des plans passant par une droite donnée ? Par des plans passant par un point donné ?

550. Quel est le lieu des points de l'espace tels, que la somme des carrés des distances de chacun de ces points à deux points fixes soit égale à un carré donné ?

551. Quel est le lieu des points de l'espace dont les distances à deux points fixes soient entre elles dans un rapport donné ?

552. Quel est le lieu des points d'une sphère, dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné ?

553. Les volumes V, V′ de deux polyèdres circonscrits à la même sphère sont entre eux comme les surfaces S, S′ de ces polyèdres.

Remarque. — Rapprocher cette question de la question 363.

§ IV. — Sur les surfaces de la zone et de la sphère.

554. Trouver le rayon d'une sphère dont la surface soit équivalente à la somme ou à la différence des surfaces de deux sphères données. Qui soit équivalente au $\frac{3}{5}$ de la surface d'une sphère donnée.

555. Trouver le rayon d'une sphère dont la surface soit à celle d'une sphère donnée comme m est à n.

556. Couper une sphère par un plan de manière que les deux zones soient entre elles dans le rapport de m à n. La couper par deux plans parallèles, de manière que les trois zones qui en résultent soient entre elles comme les nombres ou les droites m, n, p.

557. Couper une sphère par un plan tel, que la surface d'un grand cercle soit moyenne proportionnelle entre les deux zones que ce plan détermine.

558. Couper une sphère par un plan qui divise sa surface en moyenne et extrême raison.

559. Une zone sphérique à une seule base est équivalente au cercle qui a pour rayon la corde de l'arc qui engendre la zone.

560. On donne une demi-circonférence qui a pour diamètre AD et l'on demande de mener par le point A une corde AC telle que, si l'on fait tourner la figure autour de AD, la zone engendrée par l'arc AC soit dans un rapport donné K avec la surface latérale du cône engendré par la corde AC. (En vertu de la question précédente, la zone engendrée par l'arc AC a pour mesure $\pi\overline{AC}^2$ et la surface latérale du cône engendré par la corde AC a pour mesure $\pi BC.AC$, BC étant la perpendiculaire abaissée du point C sur le diamètre; ainsi, d'après la condition du problème, on doit avoir

$$\pi\overline{AC}^2 = K.\pi BC.AC,$$

ou

$$(1) \qquad AC = K.BC,$$

équation qui contient deux inconnues AC, BC.

Maintenant, d'après la figure donnée, on a cette seconde équation

$$\overline{BC}^2 = AB(2R - AB),$$

ou

$$(2) \qquad \overline{BC}^2 = AB.2R - \overline{AB}^2.$$

De cette manière on introduit une nouvelle inconnue AB et il faut trouver une troisième équation ; or le triangle rectangle ABC donne

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2,$$

et, si l'on ajoute cette équation à la précédente, il vient

$$(3) \qquad \overline{AC}^2 = AB.2R.$$

Alors il est facile d'éliminer les deux inconnues BC et AB, ce qui donne

$$\overline{AC}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{K_2} + \frac{\overline{AC}^4}{4R^2} \quad \text{ou} \quad 4K^2R^2 = 4R^2 + K^2\overline{AC}^2 \text{ ; etc.)}$$

561. Étant donnée une demi-circonférence qui a pour diamètre AB, mener par le point A une corde AC telle, qu'en faisant tourner la figure autour du diamètre AB, la surface engendrée par la corde AC soit égale à la surface engendrée par l'arc BC.

562. Couper une sphère par un plan tel, que la section soit la moitié de l'une des zones déterminées par ce plan. Par un plan tel, que la section soit équivalente à la différence des deux zones.

563. Couper une sphère par un plan tel, que la somme de la section et de la plus petite zone soit équivalente à la moitié de la surface de la sphère.

564. Si un demi-polygone régulier d'un nombre pair de côtés est inscrit dans un demi-cercle et qu'on circonscrive un demi-polygone semblable au premier, la surface de la sphère engendrée par le demi-cercle, tournant autour de son diamètre, est une moyenne proportionnelle entre les surfaces décrites par les périmètres des deux demi-polygones.

565. Inscrire dans une sphère un cylindre tel, que la somme de ses bases soit double de sa surface latérale.

566. Inscrire dans la sphère un cône dont la surface convexe soit double de celle de sa base.

567. Inscrire dans la sphère un cône dont la surface convexe soit équivalente à celle de la calotte sphérique qui est terminée au même cercle.

568. Circonscrire à une sphère un cône dont la surface convexe soit double de la base.

569. Étant donnée une sphère de rayon R, circonscrire à cette sphère un cône droit dont la base repose sur un plan diamétral et qui soit tel, que sa surface latérale soit double de celle de sa base. Calculer la hauteur du cône.

570. Étant donnés une sphère et un diamètre, à quelle distance OC du centre faut-il mener un plan DE perpendiculaire à ce diamètre pour que la surface latérale du cône SDE circonscrit à la sphère suivant la circonférence DE soit égale à la surface latérale du cône qui a pour base le même cercle DE et pour sommet l'extrémité A du diamètre ?

Remarque. — Dans cette question, l'inconnue est indiquée et l'on peut poser immédiatement $OC = x$; alors, le rayon de la sphère étant la seule quantité donnée, on doit trouver une formule de la forme

$$x = f(R).$$

Or, puisque les surfaces latérales des deux cônes doivent être égales et que les deux cônes ont même base, les apothèmes SD et AD sont égaux, et les hauteurs SC et AC sont aussi égales.

Maintenant le cône SDE étant circonscrit à la sphère, on a

$$\overline{SD}^2 = SO.SC = (SC + x)SC = (AC + x)AC\ ;$$

d'ailleurs

$$\overline{AD}^2 = AC.2R:$$

donc

$$(AC + x) = 2R \quad \text{ou} \quad R + 2x = 2R,$$

d'où

$$x = \frac{R}{2}.$$

571. Si l'on fait tourner une demi-circonférence ACB autour du diamètre AB, les arcs égaux AD, DE, EF, ... pris sur le quadrant AC décrivent des zones de plus en plus grandes.

572. Si l'on divise une demi-circonférence en trois parties

égales et qu'on la fasse tourner autour de son diamètre, la zone engendrée par l'arc du milieu est équivalente à la somme des zones engendrées par les deux arcs extrêmes.

573. Circonscrire à une sphère, de rayon donné R, un tronc de cône dont la surface soit égale à celle de la sphère de rayon donné R'.

574. Étant donnée une sphère, on prolonge un rayon d'une longueur égale à lui-même ; quelle fraction de la surface de la sphère aperçoit-on, l'œil étant placé à l'extrémité du prolongement du rayon ?

575. Calculer la surface d'une calotte sphérique vue par un observateur placé à une distance $R + h$ du centre d'une sphère de rayon R.

576. Exprimer la surface de la sphère en fonction de la circonférence C d'un grand cercle.

577. En regardant le globe de la Terre comme étant une sphère et sachant que la circonférence d'un grand cercle est égale à 40 millions de mètres ou à 400 myriamètres, trouver sa surface exprimée en myriamètres carrés.

578. A quelle hauteur doit-on s'élever au-dessus de la Terre pour apercevoir une fraction $\frac{1}{n}$ de sa surface ?

Sur les volumes du secteur sphérique et de la sphère. — Sur le volume engendré par un segment circulaire. — Sur le segment sphérique.

579. On sait que le volume engendré par un triangle ABC, tournant autour d'un axe xy mené dans son plan et par un de ses sommets A, a pour mesure la surface engendrée par le côté BC opposé à ce sommet, multipliée par le tiers de la hauteur AD qui correspond au même côté. Déduire de là que ce volume a aussi pour mesure la surface du triangle ABC multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de ce triangle.

580. Si un triangle tourne successivement autour de deux de ses côtés, quelle condition doivent remplir ces côtés pour que les deux volumes engendrés soient équivalents?

581. Un triangle scalène tourne successivement autour de ses trois côtés; quel sera le plus grand des trois volumes engendrés?

582. Un triangle ABC tourne autour d'un axe situé dans son plan et passant par le sommet A ; déterminer la position qu'il doit occuper par rapport à l'axe pour que le volume qu'il engendre soit le plus grand ou le plus petit possible. Pour que ce volume soit équivalent à celui d'une sphère donnée.

583. Dans un triangle ABC on mène une médiane AM et l'on fait tourner la figure autour du côté AC ; trouver le rapport des volumes engendrés par les deux triangles ABM, ACM.

584. Dans un triangle ABC on mène une droite DE parallèle au côté BC et l'on fait tourner la figure autour d'un axe passant par le sommet A ; trouver le rapport des volumes engendrés par les triangles ABC, ADE.

585. Les côtés d'un rectangle ABCD ont pour longueur a et b ; calculer le volume engendré par la révolution de ce rectangle autour d'un axe passant par le sommet A et perpendiculaire à la diagonale AC.

586. Un demi-décagone régulier tourne autour du diamètre du cercle circonscrit; trouver le volume engendré par ce demi-décagone, en fonction du rayon du cercle inscrit.

587. Étant donnés un cercle de rayon R et un point dont la distance au centre est égale à d, on mène par ce point une tangente AM et un diamètre BC et l'on joint le point de contact au centre O. Calculer le volume engendré par le triangle rectangle MOA ainsi formé. De plus, calculer le volume engendré par le triangle mixtiligne MBA.

588. Calculer les deux côtés b, c, de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse a et sachant que le volume engendré par la révolution du triangle autour de l'hypoténuse est égal au volume d'une sphère de rayon R.

589. Inscrire dans un demi-cercle un triangle rectangle tel, que les volumes engendrés par ce triangle et par le demi-cercle, en tournant autour du diamètre, soient entre eux dans un rapport donné.

590. Étant donnés le rayon R de la base d'un cône et sa hauteur h, à quelle distance x du sommet faut-il mener un plan parallèle à la base pour que le volume du tronc de cône ainsi déterminé soit égal au double du volume de la sphère ayant x pour diamètre.

591. Lorsque la hauteur d'un tronc de cône est égale à quatre fois la différence des rayons des bases, le volume de ce tronc est égal à la différence des volumes de deux sphères ayant pour rayons les rayons de ces mêmes bases.

592. La hauteur d'un cône circonscrit à une sphère est double du diamètre de la sphère ; démontrer que son volume est double de celui de la sphère et que la surface totale du cône est aussi double de celle de la sphère.

593. Le volume compris entre deux sphères concentriques est égal à quatre fois le tronc de cône qui aurait pour hauteur la différence des rayons des deux sphères et pour bases les cercles décrits avec ces mêmes rayons.

594. Inscrire dans une sphère un cylindre dont le volume soit un *maximum*. Un cône dont le volume soit un *maximum*.

Remarque. — Pour ces questions on suppose qu'on ait vu en Algèbre la théorie des *maxima* et des *minima*.

595. Étant donné un demi-cercle dont le diamètre est AB, mener une corde AC telle, que les volumes engendrés par le segment circulaire AMC et par le demi-cercle soient entre eux dans un rapport donné. En supposant que la corde AC ait une longueur constante et qu'elle se meuve, en restant constamment inscrite dans le demi-cercle, quelle doit être la position de cette corde pour que le volume engendré par le segment AMB soit maximum ou minimum?

596. Couper une sphère par un plan de manière que le plus

petit des deux segments sphériques déterminés par ce plan soit équivalent au cône qui aurait la même base que ce segment et dont le sommet serait le centre de la sphère. (On exprimera que le volume du cône doit être la moitié du secteur sphérique formé par ce cône et par le segment sphérique.)

597. Étant donnés une sphère et un diamètre AB, mener un plan CD perpendiculaire à ce diamètre, de manière que le volume du segment ayant pour base CD soit égal au volume du cône ayant CD pour base et pour sommet le point B.

DIFFÉRENTES QUESTIONS SUR LE LIVRE VII.

598. On donne un rectangle ABCD; par le milieu E du côté BC on mène une droite MN, qui coupe DC au point M et AB prolongé au point N et l'on fait tourner la figure autour de AD: trouver le rapport des volumes engendrés par les triangles MEC et NEB. On donne $AB = a$ et $BN = b$.

599. On a un carré ABCD, dont le côté est a, et sur le côté BC on construit, extérieurement au carré, le triangle équilatéral BCE : trouver le volume engendré par la figure totale, tournant autour du côté BE.

600. On mène les diagonales d'un reçtangle ABCD et par l'un des sommets on trace un axe xy parallèle à l'une d'elles, BD par exemple : calculer en fonction des côtés a, b du rectangle les volumes engendrés par les triangles BAD, BCD, BAC, ACD, en tournant autour de l'axe.

601. Étant donnés un cercle et deux diamètres rectangulaires AB, CD, mener une corde DE parallèle au diamètre AB, de manière que le volume du cylindre engendré par le rectangle DEGF tournant autour du diamètre AB soit égal au volume du solide engendré par le triangle CDE, tournant autour du même diamètre AB.

602. Sur le diamètre AB d'un demi-cercle on décrit deux autres demi-cercles ayant respectivement pour diamètres les

rayons OA et OB et l'on fait tourner la figure autour de AB : évaluer le volume compris sous les surfaces engendrées par les trois demi-circonférences.

603. Étant donnée une sphère, on lui circonscrit un cylindre et un cône équilatéral ; démontrer que la surface totale du cylindre est moyenne proportionnelle entre la surface de la sphère et la surface totale du cône. Même question pour les volumes des trois corps.

604. En désignant par V_3, V_4 les volumes du cône équilatéral et du cylindre circonscrits à une sphère, par V_5 le volume engendré par un demi-pentagone régulier, circonscrit à la même sphère et tournant autour d'un axe passant par l'un des points de contact et par le centre, démontrer qu'on a

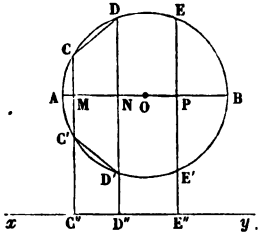
$$V_3 - V_5 = \text{le volume de la sphère}$$

et

$$V_3 + V_4 + V_5 = 5 \text{ fois le volume de la sphère.}$$

605. Trouver la mesure de la surface engendrée par une circonférence tournant autour d'un axe xy parallèle à l'un de ses diamètres AB (*fig.* 23). (Soient ACDE... une ligne brisée inscrite dans le demi-cercle ACB et AC′D′E′... une seconde ligne brisée symétrique de la première par rapport à AB, inscrite dans le demi-cercle AC′B, et menons les droites CC′, DD′, EE′, ... qui seront perpendiculaires à AB aux points M, N, P, ... et qui seront aussi perpendiculaires à xy aux points C″, D″, E″, ..., on aura

Fig. 23.



$$\text{surf. CD} = \pi\,\text{CD}\,(\text{CC}'' + \text{DD}''),$$
$$\text{surf. C}'\text{D}' = \pi\,\text{C}'\text{D}'\,(\text{C}'\text{C}'' + \text{D}'\text{D}''),$$

et, par suite,

$$\text{surf. CD} + \text{surf. C}'\text{D}' = \pi\,\text{CD}\,(\text{CC}'' + \text{DD}'' + \text{C}'\text{C}'' + \text{D}'\text{D}'').$$

Mais

$$\text{CC}'' + \text{C}'\text{C}'' = 2\text{MC}'' \quad \text{et} \quad \text{DD}'' + \text{D}'\text{D}'' = 2\text{ND}'' = 2\text{MC}'';$$

donc

$$\text{surf. CD} + \text{surf. C'D'} = (\text{CD} + \text{C'D'})\, 2\pi \text{MC''}.$$

On aura de même

$$\text{surf. DE} + \text{surf. D'E'} = (\text{DE} + \text{D'E'})\, 2\pi \text{MC''},$$

et ainsi de suite.

De là on conclut que la surface engendrée par une ligne brisée inscrite dans le cercle, symétrique par rapport à un diamètre AB et tournant autour d'un axe xy parallèle à AB, a pour mesure cette ligne brisée, multipliée par la circonférence que décrit un point quelconque M de la droite AB ; et, comme cette proposition a lieu quelles que soient les longueurs des côtés de la ligne brisée, on peut l'étendre à la mesure de la surface engendrée par une circonférence.

Ainsi cette surface est égale à la longueur de la circonférence, multipliée par la circonférence décrite par le centre O, en tournant autour de l'axe xy.

Remarque. — La surface engendrée par la circonférence tournant autour de l'axe xy est un *anneau* qui porte le nom de *tore*.

Si l'on désigne par R le rayon de la circonférence génératrice, par a la distance du centre à l'axe xy, et par S la surface du *tore*, on a

$$S = 4\pi^2 R' a.$$

606. Trouver la mesure du volume engendré par un cercle, tournant autour d'un axe xy parallèle à l'un de ses diamètres AB. (En suivant la même marche que pour la question précédente, on verra que la mesure du volume engendré par le cercle a pour mesure l'aire du cercle générateur multipliée par la circonférence décrite par le centre O, en tournant autour de l'axe xy.

En désignant par R le rayon du cercle, par a la distance du centre à l'axe xy et par V le volume du tore, on a

$$V = 2\pi^2 R^2 a.)$$

QUESTIONS SUR LE LIVRE VIII.

CHAPITRE I.

§ I et II. — Plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère. — Positions relatives de deux petits cercles.

607. Le plus petit arc de grand cercle qu'on puisse mener d'un point à une circonférence est situé sur la circonférence de grand cercle qui passe par le point et par le pôle du cercle.

608. Lorsque deux petits cercles sont extérieurs ou intérieurs l'un à l'autre, le plus petit arc de grand cercle qu'on puisse mener d'un point de l'un de ces cercles à un point de l'autre est situé sur la circonférence de grand cercle qui passe par les pôles des deux petits cercles.

609. Décrire, avec un rayon sphérique donné, un cercle qui passe par deux points donnés.

Remarque. — Le *rayon sphérique* d'un petit cercle est le plus petit des deux arcs de grand cercle qui joignent un point de ce petit cercle à ses deux pôles. Ce plus petit arc est aussi appelé *distance polaire* du petit cercle.

610. Quel est le lieu géométrique des cercles décrits avec un rayon sphérique donné et tangents à un cercle donné ?

611. Décrire, avec un rayon sphérique donné, un cercle qui passe par un point donné et qui soit tangent à un cercle donné.

612. Étant donné sur une sphère, dont on connaît le rayon,

un arc de grand cercle AB, moindre qu'une demi-circonférence, déterminer un point C également distant des points A, B, et différent des pôles de l'arc AB.

613. Tracer sur la surface de la sphère un petit cercle passant par trois points donnés A, B, C.

614. Trouver le rayon d'une sphère donnée. (Seconde méthode consistant à déterminer trois points d'une circonférence de grand cercle.)

615. Diviser en deux parties égales un arc de grand cercle AB.

Remarque. — Les quatre problèmes précédents sont résolus dans le texte de nos *Éléments*, 2e édition, n° 533, et dans le texte de l'*Abrégé*, 2e édition, n° 471.

CHAPITRE II.

§ I. — Angle de deux arcs de grand cercle et arcs de grand cercle perpendiculaires entre eux.

616. Par l'extrémité A d'un arc de grand cercle, mener un second arc de grand cercle qui fasse avec le premier un angle donné.

617. Par un point pris hors d'une circonférence de grand cercle, mener un arc de grand cercle qui fasse avec la circonférence un angle donné. (Ce problème est résolu dans la Note 81 de nos *Éléments*.)

618. Lorsque deux petits cercles P, P′, se coupent aux points A et B, l'arc de grand cercle qui passe par les deux centres est perpendiculaire sur le milieu de l'arc de grand cercle AB. (Car les points P, P′ et le centre O de la sphère étant également distants des points A et B, le plan OPP′ est perpendiculaire sur le milieu de la droite AB ; par suite, il passe par le milieu de l'arc AB et il est perpendiculaire sur le plan de cet arc.)

619. Étant donné un arc de grand cercle, mener un second arc de grand cercle perpendiculaire sur le milieu du premier.

620. Quel est le lieu des points de la sphère également distants des extrémités d'un arc de grand cercle donné.

621. Si une droite AT est tangente à un petit cercle au point A, elle est perpendiculaire au rayon OA de la sphère.

622. Tout grand cercle passant par les pôles, P, P′, d'un petit cercle est perpendiculaire à ce petit cercle. (Il faut démontrer qu'une droite AT tangente au petit cercle est perpendiculaire à la droite AT′ tangente au grand cercle.)

Remarque. — Réciproquement, si l'angle T'AT est droit, le plan qui passe par les deux droites AO, AT', perpendiculaires à AT, contient le rayon AO' du petit cercle, et, par suite, il passe par les pôles P, P'.

§ II. — Triangles et polygones sphériques.

623. Si d'un point, pris dans l'intérieur d'un triangle sphérique, on mène deux arcs de grands cercles aux extrémités d'un côté, la somme de ces arcs sera moindre que la somme des deux autres côtés du triangle. Et, si l'on joint ce point aux trois sommets du triangle par trois arcs de grands cercles, la somme de ces arcs est moindre que le périmètre du triangle et plus grande que la moitié de ce périmètre.

624. Dans un quadrilatère sphérique convexe, la somme des diagonales est plus grande que la somme de deux côtés opposés. De plus, la somme des diagonales est moindre que le périmètre du quadrilatère, mais elle est plus grande que la moitié de ce périmètre.

Observation. — La plupart des questions proposées jusqu'ici sur le Livre VIII sont extrêmement simples : leur principale utilité consiste à montrer de plus en plus les analogies qui existent entre la géométrie plane et la géométrie sphérique.

625. Étendre les propriétés des triangles polaires aux polygones sphériques convexes, de plus de trois côtés.

Sur la construction des triangles sphériques.

626. On peut construire un triangle sphérique ayant pour côtés trois arcs de grand cercle donnés a, b, c, si la somme de ces arcs est moindre qu'une circonférence de grand cercle 2π (le rayon de la sphère étant pris pour unité) et si le plus grand de ces arcs, a par exemple, est plus petit que la somme des deux autres.

Remarque. — Si l'on ne connaît pas le plus grand des arcs a, b, c, qui doivent former un triangle, on remplace les conditions

$$a+b+c<2\pi \quad \text{et} \quad a<b+c$$

par celles-ci

$$a+b+c<2\pi,\quad a<b+c,\quad b<a+c,\quad c<a+b.$$

627. Construire un triangle sphérique rectangle, connaissant un côté de l'angle droit et l'hypoténuse.

628. Construire un triangle sphérique rectangle, connaissant un angle et le côté opposé.

Remarque. — Dans tout triangle sphérique rectangle, un côté de l'angle droit est de *même espèce* que l'angle opposé, c'est-à-dire qu'il est plus petit que 90° si l'angle est aigu, et qu'il est plus grand que 90° si l'angle est obtus.

629. Construire un triangle sphérique connaissant un côté et les deux angles adjacents.

Remarque. — Ce problème, en se fondant sur les propriétés des triangles polaires, peut servir à résoudre celui-ci : Construire un triangle, connaissant un angle et les deux côtés qui le comprennent.

Mais il est plus simple de résoudre directement ce dernier problème.

630. Construire un triangle sphérique ABC, connaissant ses trois côtés a, b, c.

Remarque. — Ce problème peut servir à résoudre celui-ci : Construire un triangle, connaissant ses trois angles A, B, C.

Observation. — Il est facile de construire un triangle sphérique, connaissant ses trois côtés, si l'on décrit des arcs de petits cercles avec des ouvertures de compas plus grandes que la corde d'un quadrant, ce qui n'est pas toujours très-commode.

Mais, à la rigueur, on peut éviter cet inconvénient.

Ainsi :

1° Supposons que les trois côtés soient plus grands que $\frac{\pi}{2}$. On pourra tracer d'abord un arc égal au côté BC ou a, par exemple, puis des extrémités B et C, comme pôles, on décrira deux arcs de petits cercles avec les rayons $\pi-b$, $\pi-c$, qui se couperont au point A′, et, si l'on prolonge les côtés A′B, A′C jusqu'à leur rencontre en A, le triangle ABC sera le triangle demandé.

2° Supposons qu'on ait $a<\frac{\pi}{2}$, $b>\frac{\pi}{2}$, $c>\frac{\pi}{2}$. On tracera d'abord le côté a et l'on achèvera la construction comme dans le cas précédent.

3° Supposons qu'on ait $a>\frac{\pi}{2}$, $b<\frac{\pi}{2}$, $c<\frac{\pi}{2}$. On tracera le côté a, etc.

Il peut arriver, dans ces deux derniers cas, que le côté AC ou b soit donné de grandeur et de position ; alors on pourrait construire à part le triangle ABC et l'on connaîtrait les deux angles adjacents au côté AC.

631. Construire un triangle sphérique, connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. (La discussion de ce problème est assez compliquée; on la trouve plus particulièrement dans les *Éléments de Trigonométrie sphérique.*)

Remarque. — A ce problème on rattache celui-ci : Construire un triangle, connaissant deux angles et un côté opposé à l'un de ces angles.

Propositions sur les triangles sphériques, résultant de propositions analogues sur les angles trièdres.

632. Dans tout triangle sphérique, les arcs de grand cercle perpendiculaires sur les milieux des côtés se coupent en un même point.

633. Dans tout triangle sphérique, les arcs de grand cercle menés par les sommets perpendiculairement sur les côtés opposés se rencontrent en un même point.

634. Dans tout triangle sphérique, les arcs de grand cercle bissecteurs des angles se rencontrent en un même point.

635. Dans tout triangle sphérique, les arcs de grand cercle menés par les sommets et les milieux des côtés opposés se coupent en un même point.

Arc de grand cercle, tangent à un petit cercle.

636. Un arc de grand cercle, perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon sphérique de petit cercle, est tangent à ce petit cercle, et réciproquement.

637. Par un point donné sur la circonférence d'un petit cercle, mener un arc de grand cercle, tangent au petit cercle.

638. Par un point donné hors de la circonférence d'un

petit cercle, mener un arc de grand cercle, tangent au petit cercle.

639. Mener un arc de grand cercle, tangent à deux petits cercles donnés. (Pour fixer les idées, supposons que les deux petits cercles soient extérieurs l'un à l'autre et situés dans le même hémisphère, par rapport au grand cercle tangent; alors, en désignant les points de contact par A et B, les rayons sphériques PA, P_1B seront perpendiculaires au grand cercle tangent demandé et ils se rencontreront en un point C qui sera le pôle de l'arc AB ; ainsi, dans le triangle CPP_1, on connaît les côtés PP_1, $CP = \frac{\pi}{2} + a$, $CP_1 = \frac{\pi}{2} + b$, a et b étant les rayons sphériques PA et P_1B, etc.

Si les deux petits cercles sont situés de part et d'autre de l'arc de grand cercle tangent, on déterminera encore les pôles de ce cercle au moyen d'un triangle dont on connaît les trois côtés.

Dans chacun de ces deux cas on peut déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème soit possible.

Lorsque les deux petits cercles donnés sont extérieurs l'un à l'autre, le problème admet quatre solutions.)

CHAPITRE III.

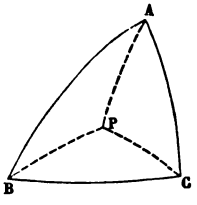
De la mesure du fuseau, du triangle et du polygone sphériques. De la mesure de l'onglet et des pyramides sphériques.

640. Le rayon d'une sphère est de 10^m; trouver la mesure du fuseau dont l'angle est de $24^\circ 18'$; la mesure de l'onglet sphérique qui a le même angle.

641. Le rayon d'une sphère est de 15^m; trouver en mètres carrés la surface d'un triangle sphérique dont les angles sont respectivement de $62^\circ 43'$, $74^\circ 52'$, $83^\circ 16'$. Trouver en mètres cubes le volume de la pyramide sphérique qui a pour base ce même triangle.

642. Le lieu des sommets des triangles sphériques ABC qui ont une base commune BC et dans lesquels l'angle au sommet diffère d'une quantité constante de la somme des angles à la base est une circonférence passant par les deux points B et C (*fig.* 24).

Fig. 24.



[Soient ABC l'un de ces triangles, P le pôle du cercle qui passe par les sommets A, B, C, et supposons d'abord que ce pôle soit situé dans l'intérieur du triangle, on aura

$$A = PAB + PAC = PBA + PCA = B - PBC + C - PCB,$$

d'où l'on tire

$$2\,PBC = B + C - A.$$

Ainsi l'angle à la base du triangle isoscèle PBC a une valeur constante; donc le point P est fixe, et par conséquent le lieu du sommet A est la circonférence de cercle décrite du point P comme pôle, avec le rayon sphérique PB.

Si le pôle P est situé hors du triangle, de l'autre côté de AB par rapport au point C ou de l'autre côté de AC par rapport au point B, on a encore

$$2\,PBC = B + C - A.$$

Si le pôle P est situé hors du triangle, de l'autre côté de BC par rapport au point A, on a

$$2\,PBC = A - (B + C)].$$

Remarque. — Le pôle P peut occuper deux positions symétriques par rapport au grand cercle BC, d'où il résulte que le lieu se compose aussi d'une seconde circonférence égale à la première.

643. Le lieu des sommets des triangles sphériques ABC de même base BC et de même surface est une circonférence de cercle passant par les points B′ et C′ symétriques de B et C. (Soit ABC l'un des triangles; puisque l'aire de ce triangle est une quantité fixe δ, on a

$$A + B + C - 2\text{ droits} = \delta,$$

et, si l'on prolonge les arcs BA, CA jusqu'à leur rencontre avec la circonférence BC en B′, C′, les angles AB′C′ et AC′B′ seront respectivement les suppléments des angles B et C; donc on aura

$$B' + C' - A = 2\text{ droits} - \delta;$$

ainsi la question est ramenée à la précédente.)

Cette proposition est connue sous le nom de *théorème de Lexell.*

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE I.

644. Deux circonférences étant extérieures l'une à l'autre, le rayon de la première égale 18^{mm} et la distance des centres égale 29^{mm} : quel est le rayon de la seconde circonférence ?

645. Deux circonférences étant intérieures l'une à l'autre, le rayon de la petite circonférence égale 12^{mm} et la distance des centres égale 7^{mm} : quel est le rayon de la grande circonférence ?

646. Deux circonférences étant extérieures l'une à l'autre, le rayon de la première égale 21^{mm}, le rayon de la seconde égale 15^{mm} et la distance des centres égale 43^{mm} : quelle est la plus petite droite qu'on puisse mener d'un point de l'une des circonférences à un point de l'autre ?

647. Deux circonférences étant intérieures l'une à l'autre, le rayon de la grande circonférence égale 24^{mm}, le rayon de la petite égale 10^{mm} et la distance des centres égale 8^{mm} : quelle est la plus petite droite qu'on puisse mener d'un point de l'une des circonférences à un point de l'autre ?

648. Dans un triangle ABC, l'angle $A = \frac{7^{dr}}{8}$, $B = \frac{3^{dr}}{4}$: quelle est la valeur de l'angle C ?

649. Dans un quadrilatère ABCD, l'angle $A = \frac{4^{dr}}{5}$, $B = \frac{2^{dr}}{3}$: quelle est la valeur commune des angles C et D ?

650. Dans un pentagone ABCDE, les angles extérieurs adjacents aux angles intérieurs A, B, C, D valent respectivement $\frac{1^{dr}}{2}$, $\frac{2^{dr}}{3}$, $\frac{3^{dr}}{4}$, $\frac{5^{dr}}{6}$; quelle est la valeur du cinquième angle

extérieur et quelles sont les valeurs des angles intérieurs A, B, C, D, E ?

651. Étant donné un triangle ABC et sachant que $AB = 324^m$, $BC = 296^m$, $AC = 232^m$, calculer les valeurs des segments déterminés sur les côtés du triangle par les points de contact du cercle inscrit.

Remarque. — Plus généralement, soient $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ et le périmètre $a + b + c = 2p$, en désignant par x, y, z les segments adjacents aux angles A, B, C, on aura

$$x = p - a, \quad y = p - b, \quad z = p - c.$$

652. Les rayons de deux cercles valent respectivement $0^m,05$ et $0^m,02$: calculer la distance de leurs centres, sachant qu'une tangente commune intérieure menée à ces deux cercles fait un angle de 30 degrés avec la ligne des centres. (On se reportera à la question 52.)

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE II.

Sur la mesure des droites et des angles.

653. L'ancienne unité de longueur usitée en France, avant l'adoption du nouveau système des poids et mesures, était la *toise*. La toise se subdivisait en 6^{pi}, le pied en 12^{po} et le pouce en 12^{li}, d'où il résulte que la toise vaut 864 lignes.

Pour mesurer une droite AB en toises, pieds, pouces, lignes, on cherche d'abord le rapport $\frac{21}{8}$, par exemple, de la droite AB à la toise CD et l'on convertit ce rapport en toises, pieds, pouces, lignes; ou bien, dans la pratique, on se sert d'une toise graduée indiquant les longueurs du pied, du pouce et de la ligne.

Cela posé, et sachant que le mètre vaut $3^{pi}0^{po}11^{li},296$ ou $443^{li},296$; évaluer en mètres et parties décimales du mètre la longueur $15^{T}4^{pi}7^{po}9^{li}$.

654. Sachant que le mètre égale $0^{T},5130740$, évaluer $8^{m},54$ en toises, pieds, pouces, lignes.

655. Étant donnés les trois nombres

$$19^{T}5^{pi}3^{po}10^{li},$$
$$14^{T}3^{pi}8^{po}11^{li},$$
$$8^{T}4^{pi}9^{po}\ 6^{li},$$

trouver leur somme et la différence qui existe entre les deux premiers.

656. Calculer le rapport de deux arcs d'une même circonférence, sachant que l'un est de $321°22'$ et l'autre de $27°21'1''$.

On trouvera de même quelle fraction de la circonférence est l'arc de $27^\circ 17' 32''$.

657. Trouver le complément de l'arc de $118^\circ 24' 56''$. Trouver le supplément de ce même arc.

Sur la mesure des surfaces polygonales.

658. Convertir le nombre $286^{mq},392715$ en mètres carrés, décimètres carrés, centimètres carrés, millimètres carrés. Exprimer le même nombre en décimètres carrés et parties décimales du décimètre carré, en centimètres carrés et parties décimales du centimètre carré, en millimètres carrés.

659. Quelle est la valeur du nombre 54263^{mq} en hectares, ares et centiares ?

660. Un mur de forme rectangulaire a $5^m,38$ de longueur sur $4^m,63$ de largeur, quelle est sa superficie ?

661. Le plancher d'une salle carrée a pour côté $6^m,43$: quelle est sa superficie ?

662. Trouver le côté d'un carré équivalent à un rectangle qui a pour longueur 729^m et pour largeur 676^m.

663. Un rectangle a pour dimensions $5^T 2^{pi} 7^{po} 9^{li}$ et $3^T 1^{pi} 4^{po} 11^{li}$; trouver sa surface en toises carrées, pieds carrés, pouces carrés, lignes carrées. De même, trouver la surface d'un carré qui a pour côté $8^T 4^{pi} 5^{po}$.

664. On a un trapèze ABCD dont les bases AB, DC valent respectivement 18^m, $13^m,50$ et l'on donne sur la base DC un point E, distant du point D de $4^m,60$: mener par le point E une droite EF qui partage le trapèze en deux autres équivalents entre eux. (On prendra pour inconnue la droite AF.)

665. Calculer, à un centimètre près, le côté du carré équivalent au triangle équilatéral dont le rayon du cercle inscrit a $2^m,50$ de longueur. (*Voir* Quest. 668, *Observation.*)

666. La surface d'un rectangle vaut $24^{mq},35$; sa base est à sa hauteur dans le rapport de 7 à 4 : calculer à $0^{m},001$ près les dimensions du rectangle.

667. L'aire d'un trapèze est égale à $2034^{mq},60$; sa hauteur est de $18^{m},40$ et sa base inférieure de $54^{m},48$: calculer sa base supérieure à moins d'un centimètre.

668. L'hypoténuse d'un triangle rectangle est de $23^{m},714$; le rapport des côtés de l'angle droit est 3,514 : on demande de calculer chacun de ces côtés à moins de $0^{m},001$ près.

Observation. — Les questions 665, 668 exigent qu'on connaisse le *théorème de Pythagore*, c'est-à-dire qu'on sache que le carré fait sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés faits sur les deux côtés de l'angle droit.

Du reste, il est facile de démontrer ce théorème à la fin de la mesure des surfaces polygonales. (*Voir* nos *Éléments*, n° 239.)

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE III.

Sur les triangles et les polygones semblables.

669. L'une des bases d'un trapèze est de $48^m,9$, la seconde base est le tiers de la première, sa hauteur est de 18^m et l'on prolonge les côtés non parallèles : calculer les hauteurs des deux triangles qui en résultent.

670. La base d'un triangle est de $32^m,64$ et sa hauteur est de $20^m,7$: calculer le côté du carré inscrit dans le triangle.

671. La base d'un triangle est a et sa hauteur h : calculer les côtés d'un rectangle inscrit dans le triangle et dont le périmètre est $2p$. Application : $a = 18^m$, $h = 31^m$, $2p = 48^m$.

672. Les surfaces de deux polygones semblables valent respectivement $50^{mq},9796$ et $39^{mq},4384$: quel est le rapport de leurs périmètres ?

Sur les droites proportionnelles.

673. Les deux bases d'un trapèze valent 24^m et 18^m, la hauteur égale 12^m : à quelle distance de la grande base faut-il lui mener une parallèle pour que cette parallèle partage la surface du trapèze en deux parties équivalentes ?

674. L'une des bases d'un trapèze vaut 12^m, la hauteur de la figure égale 5^m et sa surface égale 40^{mq} : calculer la longueur d'une parallèle à la base menée dans le trapèze à une distance de 1^m de la base.

675. Étant données deux droites parallèles, on prend sur ces droites deux systèmes de trois points A, B, C et A′, B′, C′, tels

qu'on ait $AB = 2^m$, $BC = 5^m$, $A'B' = 1^m,21$, $B'C' = 3^m,10$; dire si les droites obtenues en joignant AA', BB', CC', étant prolongées, iront concourir au même point.

676. Deux cordes d'un cercle se coupent : les deux parties de l'une valent respectivement 43^{mm} et 24^{mm}; de plus la différence entre les deux parties de l'autre est de 29^{mm} : calculer la longueur de cette dernière corde.

677. Deux observateurs placés à bord de deux navires et élevés l'un et l'autre de 3^m au-dessus du niveau de la mer cessent de se voir à une distance de 12600^m : déduire de là une valeur approchée du rayon de la Terre.

678. A quelle distance en pleine mer s'étend la vue d'un homme placé à 60^m au-dessus du niveau de la mer ? On supposera le rayon de la surface de la mer égal à 6366198^m.

679. Étant donnée une circonférence de 1^m de rayon et un point distant de 8^m du centre, mener par ce point une sécante telle, que la corde interceptée soit égale à un mètre. On calculera à $0^m,001$ la longueur de la partie extérieure.

680. Déterminer sur une tangente à un cercle de rayon $4^m,653$ un point tel, qu'une sécante menée au cercle par ce point et le centre soit partagée en deux parties égales au point où elle rencontre le cercle.

Sur les relations entre les côtés et divers autres éléments d'un triangle ou d'un quadrilatère.

681. Calculer, à moins d'un centimètre carré, la surface d'un rectangle dont la base est égale à $12^m,25$ et la diagonale à $18^m,35$.

682. Dans un triangle rectangle un angle aigu vaut 60° et le côté opposé est égal à 2^m : calculer à $0^m,01$ près la valeur de l'autre côté de l'angle droit.

683. Trouver les côtés d'un triangle rectangle, sachant que ces côtés sont mesurés par trois nombres entiers consécutifs.

684. On donne une droite indéfinie xy et un point A dont

la distance à cette droite est AD = 18^m. Du point A comme centre, avec un rayon AB = 42^m, on décrit un arc de cercle qui coupe xy aux points B et C. On demande : 1° la surface du triangle ABC ; 2° la valeur du côté du carré équivalent à ce triangle à $0^m,001$ près.

685. L'hypoténuse d'un triangle rectangle est de 72^m et sa surface de 864^{mq} : trouver les deux côtés de l'angle droit.

686. Calculer à $0^m,001$ près la longueur d'une tangente commune à deux cercles ayant pour rayons 56^m et 12^m, et pour distance des centres 124^m.

687. Le rayon d'un cercle vaut $6^m,5$; on le prolonge d'une quantité égale à $3^m,7$; par l'extrémité du prolongement on mène deux tangentes au cercle et l'on joint entre eux les points de contact : calculer la longueur de la corde ainsi formée et sa distance au centre du cercle.

688. A un cercle, dont le rayon est de 15^m, on mène des tangentes perpendiculaires entre elles deux à deux et l'on sait que le lieu des points de rencontre de ces tangentes est une circonférence : calculer le rayon de cette circonférence.

689. Du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse : calculer la longueur de cette perpendiculaire et celle de chacun des segments de l'hypoténuse, sachant que les côtés de l'angle droit du triangle valent $6^m,7$ et $9^m,5$.

690. L'hypoténuse d'un triangle rectangle vaut $4^m,35$ et la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est égale à $1^m,75$: calculer à $0^m,01$ près la valeur de chacun des côtés de l'angle droit du triangle.

691. Calculer en hectares l'aire d'un losange dont le côté est égal à la plus petite diagonale, sachant que la longueur de chacune de ces lignes est de $32^m,50$.

692. Les deux bases d'un trapèze valent 783^m et 556^m ; les deux côtés non parallèles valent chacun 214^m : calculer à $0^m,001$ près la longueur des diagonales du trapèze.

693. Les côtés parallèles d'un trapèze valent $6^m,28$ et $4^m,153$; les deux autres côtés, également inclinés sur la base, valent chacun $3^m,2$: calculer l'aire du trapèze.

694. Dans un trapèze la grande base égale 18^m; les angles adjacents valent chacun $45°$ et les côtés non parallèles sont égaux l'un et l'autre à 7^m: calculer l'aire du trapèze, ainsi que l'aire du triangle formé par la petite base et les côtés non parallèles prolongés.

695. Évaluer en ares un terrain qui a la forme d'un trapèze dont les côtés non parallèles sont égaux chacun à 62^m, les bases étant de 110^m et de 48^m.

Quelle est, en ares et centiares, la surface du triangle formé par les prolongements des côtés non parallèles du trapèze?

696. Calculer l'aire d'un triangle dont les côtés ont pour longueurs respectives 570^m, 616^m, 462^m.

697. Dans un triangle ABC, on a $AB = 6^m$, $BC = 5^m$ et $AC = 4^m$; trouver la longueur de la droite AD qui joint le sommet A au milieu de la base BC: trouver la longueur de la projection de la médiane AD sur le côté BC.

698. Dans un triangle ABC, on a $AB = 7^m$, $BC = 6^m$ et $AC = 5^m$: trouver la longueur de la droite AD qui divise la base BC en deux segments AD, DC, qui sont entre eux comme 3 est à 2.

699. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle valent $4^m,82$ et $5^m,37$: calculer à $0^m,001$ près les segments que la bissectrice de l'angle droit de ce triangle détermine sur l'hypoténuse.

700. Dans un triangle ABC, on a $AB = 9^m$, $BC = 8^m$ et $AC = 7^m$; on mène la bissectrice AD de l'angle A, et l'on demande de calculer: 1° les surfaces des deux triangles ABD, ACD; 2° la longueur de la parallèle DE à AC, terminée au côté AB en E.

701. Dans un quadrilatère inscrit ABCD, on a $AB = 10^m$,

$BC = 12^m$, $CD = 13^m$ et $DA = 8^m$: calculer à $0^m,01$ près les longueurs des diagonales : calculer l'aire du quadrilatère.

DIFFÉRENTES QUESTIONS SE RAPPORTANT AU LIVRE III.

702. Sur une droite AB dont la longueur est égale à $0^m,25$, on élève aux points A et B des perpendiculaires AC, BD, dont les longueurs valent $AC = 0^m,13$, $BD = 0^m,07$. On prend ensuite sur AB un point E tel que les angles CEA, DEB soient égaux : calculer les longueurs EA, EB.

703. Une bille va de A en B sur un billard, après avoir touché la bande CD. On donne la distance AB égale à 2^m. Les distances des points A et B à la bande CD sont respectivement $AE = 1^m$, $BF = 1^m,50$: trouver la longueur du chemin que parcourt la bille. [Du point B menons au point A′, symétrique du point A, la droite BA′ qui rencontre CD au point G et la longueur du chemin parcouru AG + GB sera égale à BA′.

Maintenant du point B abaissons BH perpendiculaire sur AA′ ; on aura

$$\overline{BA'}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{A'H}^2 = \overline{BH}^2 + (BF + AE)^2$$

et

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 - (BF - AE)^2,$$

donc

$$\overline{BA'}^2 = \overline{AB}^2 + (BF + AE)^2 - (BF - AE)^2,$$

etc.]

704. Dans un cercle de 28^m de rayon, on mène un diamètre et une corde perpendiculaires l'un sur l'autre ; la longueur de la corde est de 24^m : calculer la longueur de chacun des segments qu'elle détermine sur le diamètre.

705. L'une des bases d'un trapèze vaut 10^m, la hauteur de la figure égale 4^m et sa surface égale 32^{mq} : calculer la longueur d'une parallèle à la base menée dans le trapèze à une distance de 1^m de la base donnée.

706. La surface d'un triangle rectangle est égale à $18^{mq},6$, la différence des surfaces des carrés construits sur les deux

côtés de l'angle droit est égale à $20^{mq},75$: on demande de calculer les trois côtés du triangle.

707. L'hypoténuse d'un triangle rectangle est de $36^{m},28$; la différence des côtés de l'angle droit est de $2^{m},13$: on demande de calculer chacun de ces côtés à moins de $0^{m},001$ près.

708. Partager une droite dont la longueur est de $21^{m},14$ en deux parties telles, que la somme des carrés construits sur chacune d'elles soit égale au carré construit sur une autre droite dont la longueur est de $16^{m},45$.

709. Évaluer la surface d'un triangle, sachant que le périmètre est égal à 20^{m}, qu'un côté a est égal à la demi-somme des autres côtés b et c, et que le rectangle construit sur ces deux derniers côtés, l'un comme base et l'autre comme hauteur, a une surface égale à 36 mètres carrés.

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE IV.

Sur les polygones réguliers.

710. L'angle d'un polygone équiangle vaut 165°: combien ce polygone a-t-il de côtés?

711. Trouver l'angle formé par deux côtés consécutifs d'un polygone régulier de 17 côtés. Y a-t-il dans un tel polygone deux côtés parallèles? Trouver l'angle le plus petit que forment deux côtés de la figure prolongés.

712. Calculer à $0^m,01$ près les côtés du carré et de l'octogone régulier inscrits dans un cercle dont le rayon égale $5^m,3$.

713. Calculer à $0^m,01$ près les côtés du triangle équilatéral et du dodécagone régulier inscrits dans un cercle dont le rayon égale $3^m,50$.

714. Calculer à $0^m,001$ près le côté du décagone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon égale $2^m,7$.

715. Calculer à $0^m,1$ près le côté du pentagone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon égale $1^m,6$.

716. Calculer en hectares la surface d'un hexagone régulier de 138^m de côté.

717. La surface d'un hexagone régulier vaut $48^{ares},23$: calculer son rayon à $0^m,001$ près.

718. Une salle rectangulaire a $6^m,936$ de longueur et $5^m,10$ de largeur; on veut la carreler avec des carreaux ayant la forme d'hexagones réguliers, de $0^m,1$ de côté, en remplissant les vides aux angles et sur les côtés du rectangle avec des frag-

ments de carreaux : calculer le nombre de carreaux nécessaire.

719. Calculer la surface d'un triangle équilatéral, sachant que le rayon du cercle inscrit vaut $163^m,25$.

720. D'un point O pris dans le plan d'un triangle équilatéral ABC de 450^m de côté, on voit deux côtés du triangle chacun sous un angle de $120°$: trouver la distance de ce point à l'un des sommets du triangle, ainsi que la surface de l'un des triangles, qui a pour sommet le point O et pour base l'un des côtés du triangle ABC.

721. Un terrain est limité par un polygone irrégulier dont le périmètre vaut 354^m et dont tous les côtés sont tangents à un cercle de 48^m de rayon : calculer la surface du terrain et le côté du carré équivalent.

722. Les côtés de deux pentagones réguliers valent 5^m et 7^m : calculer le côté d'un troisième pentagone régulier ayant sa surface égale à la somme des surfaces des deux premiers.

723. Calculer le rayon du cercle circonscrit à un carré dans lequel l'excès de la diagonale sur le côté est égal à 8^m.

724. La différence entre les surfaces du carré et de l'hexagone régulier inscrits dans un même cercle est de 6^{mq} : calculer à $0^m,001$ près le rayon du cercle.

725. Calculer à $0^m,001$ près le rayon d'un cercle, sachant qu'une corde de ce cercle vaut $4^m,7$ et que la corde qui soustend un arc double vaut $5^m,8$.

726. Dans un cercle, on inscrit un octogone régulier ; on donne le diamètre du cercle égal à 1^m : on demande le côté et la surface de cet octogone.

Sur les mesures de la circonférence et du cercle.

727. Calculer à $0^m,001$ près la longueur d'une circonférence inscrite dans un triangle équilatéral de $7^m,35$ de côté.

728. Calculer le rayon d'un cercle dans lequel un arc de $1''$ vaut $0^m,001$.

729. Dans un certain cercle, un arc de $72°31'24'',5$ vaut 18^m : calculer la graduation de l'arc de ce cercle ayant pour longueur 2^m.

730. Calculer à $0^m,001$ près la longueur de la corde qui sous-tend un arc de $120°$ dans un cercle de $83^m,5$ de rayon.

731. Calculer le côté d'un losange, sachant que ce côté est égal à la plus petite diagonale et que la surface du losange équivaut à celle d'un cercle de 10^m de rayon.

732. Trouver à moins de $0^m,001$ le rayon d'un cercle, sachant que si ce rayon augmentait de $0^m,01$, l'aire de ce cercle augmenterait de 1^m carré.

733. Calculer à $0^m,001$ près le rayon d'un cercle, sachant que la surface de ce cercle surpasse celle de l'hexagone régulier inscrit de $45^{mq},38$.

734. Le périmètre d'un hexagone régulier vaut 15^m : calculer à $0^{mq},0001$ près l'aire du cercle inscrit dans cet hexagone.

735. Calculer l'aire d'un cercle, dans lequel une corde de $0^m,8$ de longueur sous-tend un arc de $120°$.

736. La surface du cercle étant exprimée en fonction de sa circonférence, calculer à un kilomètre carré près l'aire d'un méridien terrestre.

737. La différence entre les surfaces du carré et de l'hexagone régulier inscrits dans un même cercle est de 10^{mq} : trouver la surface du cercle à $0^{mq},001$ près.

738. Trouver les rapports des surfaces d'un triangle équilatéral, d'un carré et d'un cercle, sachant que le périmètre de chacune de ces figures est égal à 6^m.

739. Un triangle équilatéral est inscrit dans un cercle ; la somme des aires des deux figures est égale à 5^{mq} : calculer l'aire de chacune d'elles.

740. Calculer à $0^{mq},01$ près l'aire d'un cercle tel, que la surface de l'hexagone régulier inscrit dans ce cercle soit de 15^{mq}.

741. Calculer la corde, le secteur et le segment correspondant à un arc de 60° dans un cercle de $4^{m},12$ de rayon.

742. Calculer à $0^{mq},01$ près l'aire d'un secteur de 49°26′31″ situé dans un cercle de $2^{m},18$ de diamètre.

743. Trouver à une seconde près la graduation de l'arc d'un secteur dont la surface vaut $0^{mq},01$ et qui appartient à un cercle de $0^{m},5$ de rayon.

744. La surface d'un secteur circulaire est de $4^{mq},27$; son angle au centre de 64°23′ : quelle est, à $0^{m},001$ près, la longueur de l'arc de ce secteur?

On fera usage de la méthode d'Oughtred pour la multiplication abrégée.

745. Calculer à $0^{m},001$ près le rayon d'un cercle dans lequel l'arc d'un secteur, de $1^{mq},25$ de surface, a pour longueur $1^{m},13$.

746. Calculer à $0^{mq},001$ près l'aire d'un segment de cercle dont l'arc est de 240° et dont le rayon vaut 2^{m}.

747. Calculer en hectares l'aire d'un segment compris entre un arc de 90° et sa corde dans un cercle de 843^{m} de rayon.

748. Évaluer le rapport des surfaces des deux segments dans lesquels est partagé un cercle par une corde égale au rayon.

Sur les angles évalués d'après un nouvel angle, pris pour unité.

Jusqu'ici les angles ont été mesurés en prenant pour unité d'angle l'angle droit ou l'angle d'un degré. Mais, dans la Trigonométrie par exemple, on les mesure souvent en prenant pour unité d'angle l'angle au centre qui intercepte un arc égal au rayon, ce rayon étant pris pour unité.

De là les deux questions suivantes :

749. Exprimer en degrés, minutes et secondes, l'angle au centre AOM qui intercepte l'arc AM égal au rayon, ce rayon étant pris pour unité. (On pose la proportion

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{1}{AOM},$$

et l'on trouve

$$AOM = 57^\circ 17' 45'' \text{ à } 1'' \text{ près.})$$

750. Un angle au centre AOM vaut, d'après l'ancienne unité, $64^\circ 18' 25''$; l'évaluer d'après la nouvelle unité. (On pose la proportion $\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{64^\circ 18' 25''}{AOM}$ et l'on calcule la valeur de AOM en décimales.)

Remarque. — D'après la nouvelle unité d'angles, les angles de 180°, de 120°, de 90°, de 60°, de 30° sont exprimés respectivement par π, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$.

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE V.

751. Étant donnés sur un plan MN une circonférence O, dont le rayon est égal à $1^m,75$, et un point A distant du centre O de $2^m,3$, on élève sur MN une perpendiculaire AB égale à 3^m: calculer à $0^m,01$ près les longueurs de la plus petite et de la plus grande droite qu'on puisse mener du point B à la circonférence.

752. On donne sur un plan les projections a et b de deux points A et B et la distance ab égale à $2^m,83$; les lignes projetantes Aa et Bb valent respectivement $1^m,64$ et $3^m,48$: calculer à $0^m,001$ près la longueur de la droite AB.

753. Étant donnée une droite AB oblique à un plan MN, formant avec ce plan un angle de 30° et égale à $8^m,14$, calculer à $0^m,01$ près la longueur d'une autre oblique AC, faisant avec le plan MN un angle de 60°.

754. Trouver à $0^m,001$ près le rapport d'un angle dièdre de 115°23′46″ à son supplément.

755. Les arêtes OA, OB, OC d'un angle trièdre trirectangle OABC valent respectivement $8^m,24$, $7^m,15$, $9^m,56$: calculer les hauteurs du triangle ABC.

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE VI.

Sur le prisme et la pyramide.

756. Démontrer que les diagonales AG, BH, CE d'un parallélipipède rectangle ABCDEFGH sont égales et calculer la longueur d'une de ces diagonales, sachant que les arêtes AB, AD, AE valent respectivement $10^m,3$, $8^m,5$, $7^m,9$.

757. Couper un cube par un plan de manière que la section soit un hexagone régulier, et calculer le rayon de cet hexagone, sachant que le côté du cube vaut 3^m. (*Voir* la Quest. 449.)

758. La hauteur d'un prisme droit est $0^m,1$; chaque base est un rectangle dont l'un des côtés est double de l'autre ; de plus, les deux bases et les quatre faces latérales ont une surface totale de $0^{mq},0028$: calculer l'aire des bases et celles des faces latérales.

759. Les arêtes OA, OB, OC d'un tétraèdre, dans lequel l'angle trièdre O est trirectangle, valent respectivement $3^m,8$, $4^m,5$, $5^m,2$: calculer la hauteur du tétraèdre abaissée du sommet O sur la face ABC.

760. Évaluer la hauteur d'une pyramide régulière à base carrée, sachant que la surface de la base vaut $8^{mq},52$ et que la longueur de chaque arête latérale est $5^m,46$.

761. Une pyramide a pour hauteur $4^m,50$ et pour base un carré de $2^m,86$ de côté : à quelle distance de la base faut-il mener un plan parallèle à cette base pour que la section qu'il détermine ait pour surface $3^{mq},65$?

Sur les mesures des volumes du parallélipipède et du prisme.

762. On donne trois cubes : le premier a 3^m de côté, le second 4^m et le troisième 5^m. On demande quel sera le côté d'un quatrième cube dont le volume égalera la somme des volumes des trois cubes donnés.

763. Calculer à $0^m,1$ cube près le volume d'un prisme dont la base est un hexagone régulier, sachant que le côté de cette base est de $2^m,56$ et la hauteur de $3^m,15$.

764. Un parallélipipède rectangle a pour volume $4762^{mc},7$: calculer les longueurs de ses arêtes, sachant qu'elles sont entre elles comme les nombres 3, 5 et 7.

765. Un prisme droit a pour base un triangle équilatéral ; son volume est égal à 2^{mc} et sa hauteur égale à $1^m,25$; calculer, à $0^m,01$ près, le côté de sa base.

766. La surface totale d'un prisme droit hexagonal régulier vaut 15^{mq} et sa hauteur est égale à $1^m,23$: calculer son volume.

767. Un bassin dont le fond est horizontal a la forme d'un prisme droit dont la base est un octogone régulier de 8^m de côté : combien contient-il de mètres cubes d'eau, lorsque le niveau de celle-ci s'élève à $1^m,35$ du fond?

Observation. — On sait qu'en France l'unité de poids est le *gramme*. Le gramme est le poids d'un centimètre cube d'eau distillée, prise à la température de 4° C. Ainsi le nombre qui exprime le poids d'une certaine quantité d'eau, en grammes, exprime aussi son volume en centimètres cubes ; de même, le nombre qui exprime le poids d'une certaine quantité d'eau, en kilogrammes, exprime aussi son volume, en décimètres cubes.

Cela posé, on appelle *densité* d'un corps le rapport de son poids au poids d'un même volume d'eau. En désignant par P le poids d'un corps, d'après le gramme pris pour unité, par P′ le poids de la quantité d'eau qui a le même volume que le corps et par D la densité du corps, on aura donc

$$P = P'D ;$$

mais le nombre P′, qui exprime des grammes, exprime aussi le volume V

du corps, d'après le centimètre cube pris pour unité ; donc on a la formule

$$P = VD,$$

c'est-à-dire que *le poids d'un corps est égal à son volume multiplié par sa densité.*

Si le poids du corps était évalué d'après le kilogramme pris pour unité, il est clair que le volume devrait être évalué en prenant pour unité le décimètre cube.

Maintenant passons aux deux questions suivantes :

768. On fabrique avec de l'or, dont la densité est 19,36, des feuilles qui ont $0^{mm},001$ d'épaisseur : quelle surface pourra-t-on recouvrir avec une certaine quantité de feuilles pesant ensemble 5^{gr}?

769. Un prisme en fonte pèse 4^{kg}; sa base est un triangle équilatéral et sa hauteur est double du côté de sa base : calculer ce côté. La densité de la fonte est 7,7.

Sur les mesures des volumes de la pyramide et du tronc de pyramide.

770. La plus grande pyramide d'Égypte a 146^{m} de hauteur ; sa base est un carré dont le côté a 257^{m}. Le sommet du Panthéon est à 79^{m} au-dessus du pavé. On imagine un prisme droit dont la base carrée aurait pour côté la hauteur du Panthéon, et dont l'élévation serait celle de la pyramide. On demande de comparer le volume de la pyramide et le volume du prisme.

771. Trouver le volume d'une pyramide hexagonale régulière dont le côté de la base est égal à $1^{m},5$ et dont chaque arête est égale à 3^{m}.

772. Un tronc de pyramide triangulaire a pour bases des triangles isoscèles dont l'angle au sommet est de 45°; les côtés égaux de l'un valent 1^{m}, ceux de l'autre $\frac{1}{3}$ de mètre, la hauteur du tronc est égale à 6^{m} : calculer le volume de la pyramide formée par la petite base et le prolongement des faces latérales du tronc.

773. On détache d'une pyramide triangulaire, par un plan parallèle à la base mené à 2^m du sommet, un tronc dont on demande le volume, en prenant la différence des volumes de la grande et de la petite pyramide. Les côtés de la base de la pyramide donnée sont 13^m, 14^m et 15^m. La hauteur de cette pyramide est de 16^m.

774. Calculer le volume d'un tronc de pyramide triangulaire régulière dont la grande base a pour côté 7^m, la petite 3^m et dont l'arête latérale est égale à 9^m.

775. Le volume d'un tronc de pyramide triangulaire régulière est égale à 80^{mc} ; la hauteur de la pyramide vaut 10^m et le côté de l'une des bases est égal à 5^m : calculer le côté de l'autre base.

776. Les deux bases d'un tronc de pyramide sont des hexagones réguliers ayant pour côté 1^m et 2^m : calculer la hauteur du tronc, sachant que son volume est égal à 12^{mc}.

777. Calculer le volume compris entre quatre trapèzes isoscèles et ayant pour bases deux rectangles parallèles dont les dimensions sont pour l'un 3^m et 2^m, et pour l'autre $1^m,5$ et 1^m; la longueur des côtés non parallèles des trapèzes est pour chacun $1^m,20$.

778. On veut construire une digue en granit longue de 750^m, haute de $3^m,50$, large de $5^m,75$ à la base et de $4^m,20$ au sommet : calculer le volume du granit nécessaire.

779. Un chemin de fer traverse une plaine horizontale sur un remblai ayant 6^m de hauteur, 8^m de largeur au sommet et des talus dont la pente est $\frac{3}{4}$: calculer combien ce remblai contient de mètres cubes sur un kilomètre de longueur, et dire en outre quelle est sur la même longueur la surface de chaque talus.

Remarque. — Si une droite AB est horizontale et que du point B on élève une verticale BC égale aux $\frac{3}{4}$ de AB, on dit que la *pente* de la droite AC est $\frac{3}{4}$.

780. Calculer en hectolitres la capacité d'un bassin de forme carrée de 12^m de côté dont les murs sont en talus, le

fond étant un carré de 10^m de côté et la profondeur étant $2^m,10$.

781. Calculer la capacité d'une caisse ayant à l'intérieur les dimensions suivantes : profondeur égale $0^m,75$, longueur au fond égale $1^m,35$, longueur au bord supérieur égale $1^m,52$, largeur au fond égale $0^m,62$, largeur au bord supérieur égale $0^m,86$.

Sur les polyèdres semblables et sur les polyèdres réguliers.

782. Une pyramide dont une arête a $21^m,638$ est coupée par un plan parallèle à la base, de telle sorte que le volume de la petite pyramide est le dixième de celui de la pyramide totale : calculer la distance du sommet, comptée sur l'arête a, au plan donné.

783. Étant donnée une pyramide SABC, on mène un plan parallèle à la base ABC, lequel forme la petite pyramide Sabc : on demande à quelle distance de la base doit être mené ce plan pour que le volume de cette dernière pyramide soit le sixième du volume du tronc de pyramide compris entre les deux bases.

784. Calculer le volume d'un tétraèdre régulier dont l'arête vaut 1^m.

785. Calculer le côté d'un tétraèdre régulier dont le volume est égal à 100^{mc}.

786. Calculer le volume d'un octaèdre régulier dont l'arête vaut 1^m.

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE VII.

Sur les surfaces et les volumes du cylindre, du cône et du tronc de cône.

787. Quel est le diamètre d'un cylindre dont le volume est de 50 hectolitres et la hauteur de $1^m,3$?

788. On a un réservoir cylindrique de $3^m,15$ de profondeur; il doit contenir 1500^{lit} d'eau : on demande son diamètre.

789. La hauteur d'un cylindre est égale à $3^m,25$: on propose de calculer le rayon à $0^m,01$ près, sachant que la surface totale est égale à la surface d'un cercle de $4^m,18$ de rayon.

790. On fait tourner un rectangle successivement autour de deux côtés consécutifs, et les deux volumes engendrés sont de $40\,000^{mc}$ et de $50\,000^{mc}$: trouver la longueur de la diagonale de ce rectangle.

791. Calculer les dimensions de l'hectolitre, sachant qu'il a la forme d'un cylindre dont la hauteur est égale au diamètre de la base.

792. Un cylindre de fer de $2^m,35$ de hauteur pèse 38^{kg} : calculer le diamètre de sa base. La densité du fer égale 7,788.

793. Il faut $0^{mc},01$ d'or pour dorer la surface latérale d'un cylindre ayant pour hauteur $0^m,85$ et pour rayon de base $0^m,3$: évaluer l'épaisseur de la couche d'or.

794. Un fil de platine pèse 1 gramme, il a pour diamètre $\frac{1}{1200}$ de millimètre : calculer sa longueur, sachant que la densité du platine égale 20.

795. On verse 10^{kg} de mercure dans un vase cylindrique

dont le diamètre intérieur est égal à $0^m,1$: calculer la hauteur à laquelle le mercure s'élèvera dans le vase. La densité du mercure égale 13,596.

796. 1^{gr} de mercure occupe dans un tube capillaire une longueur de $0^m,138$: évaluer le diamètre intérieur du tube. La densité du mercure = 13,596.

797. La surface totale d'un cylindre droit, à base circulaire, est égale au cercle dont le rayon a 3^m de longueur ; sa hauteur est de 2^m : calculer son volume à $0^{mc},01$ près.

798. Le volume d'un cône droit est de $\frac{1}{7}$ de mètre cube, le rayon de la base est de 1^m : on demande la surface latérale de ce cône.

799. Le volume d'un cône est de 2^{mc} ; sa hauteur est de $3^m,8$: calculer le rayon de la base.

800. Calculer la surface totale d'un tronc de cône, sachant que le rayon de la base supérieure égale 1^m, le rayon de la base inférieure égale 2^m et la hauteur égale 1^m.

801. Les rayons des deux bases d'un tronc de cône valent $4^m,6$ et $8^m,5$; la hauteur égale 3^m : calculer la surface latérale et le volume du cône entier.

802. La hauteur d'un cône est égale à $6^m,15$ et le rayon de sa base est égal à $1^m,45$: calculer à $0^{mc},1$ près le tronc de cône que l'on obtient en coupant le cône proposé par un plan parallèle à sa base, à la distance de $0^m,03$ de cette base.

803. Dans un cône dont la hauteur est 24^m et le volume 403^{mc}, mener un plan parallèle à la base, de manière que le volume du petit cône ainsi déterminé soit égal à 110^{mc}.

804. Étant donné un cône tronqué, dont la hauteur est h, et dont les rayons des bases sont 5^m et 18^m, calculer le rayon d'un cylindre, de même hauteur h, dont le volume est équivalent à celui du cône tronqué.

805. Le volume d'un tronc de cône égale $38^{mc},254$; sa hauteur est $2^m,7$ et le rayon de l'une des bases égale $3^m,20$: calculer à 0,01 près le rayon de l'autre base.

806. Les rayons des bases d'un tronc de cône valent $8^m,16$

et $6^m,12$; la hauteur égale $4^m,8$: trouver le nombre par lequel il faut multiplier la surface latérale du tronc pour que le produit représente le volume de ce tronc.

807. Un cylindre et un tronc de cône ont une base commune et même hauteur : on demande quel doit être le rapport des rayons des deux bases du tronc de cône pour que le volume de ce tronc soit égal à la moitié du volume du cylindre.

808. Un cône de 72^m de hauteur est partagé en trois parties équivalentes par deux plans parallèles à sa base : calculer les distances de ces deux plans au sommet du cône.

Sur les surfaces de la zone et de la sphère.

809. Une zone à deux bases appartient à une sphère de 12^m de rayon ; la surface de cette zone égale 90^{mq}, et la distance d'une des bases au centre est un mètre : calculer la surface de l'autre base.

810. Le rayon d'une sphère étant 1^m, calculer à $0^m,001$ près la hauteur d'un cône ayant pour base un petit cercle et pour sommet le centre de la sphère, sachant que sa surface latérale est le dixième de la surface de la sphère.

811. Calculer la surface d'une calotte sphérique dont la hauteur vaut $0^m,46$ et le rayon de base $0^m,18$.

812. Calculer à $0^{mq},01$ près la surface d'une zone engendrée par un arc de 30° en tournant autour du diamètre qui passe par l'une de ses extrémités. Le rayon du cercle est égal à $4^m,82$.

813. Évaluer en myriamètres carrés la surface de la Terre supposée sphérique.

814. Une chaudière cylindrique est terminée par deux hémisphères. Sa surface totale est de 5^{mq}. On la coupe suivant l'axe par un plan qui détermine une section dont le périmètre est de 4^m : trouver la hauteur et le rayon de la partie cylindrique de la chaudière.

Sur les volumes du secteur sphérique, de la sphère et du segment sphérique.

815. Dans un triangle ABC, rectangle en A, on donne les deux côtés de l'angle droit $AB = 9^m$, $AC = 5^m$; on suppose que ce triangle fait une révolution autour de l'hypoténuse BC, et l'on demande la valeur du volume engendré à $0^m,01$ cube près.

816. Un triangle isoscèle ABC, dont la base $BC = 6^m$, et le côté $AB = 3^m,25$, tourne autour d'une droite parallèle à BC passant par le sommet A : on demande le volume engendré.

817. Calculer à $0^{mc},1$ près le volume engendré par un secteur circulaire dont l'angle au centre égale 45° et qui tourne autour d'un de ses côtés. Le rayon du cercle auquel appartient le secteur vaut $5^m,843$.

818. Calculer le volume engendré par un secteur circulaire tournant autour d'un de ses côtés, sachant que l'arc de ce secteur a pour corde le côté du triangle équilatéral inscrit et que le rayon du cercle vaut 1^m.

819. Évaluer le volume d'une sphère circonscrite à un cube de $0^m,48$ de côté.

820. Trouver le volume d'une sphère, sachant qu'une zone de cette sphère a pour hauteur $0^m,64$ et pour surface 2^{mq}.

821. Le diamètre d'une sphère est de $0^m,8$: on demande quel diamètre il faudrait donner à la base d'un cône dont la hauteur est $0^m,4$ pour que le volume de ce cône fût équivalent à celui de la sphère.

822. Un demi-cercle a pour diamètre AB et pour centre le point O ; dans le plan de ce demi-cercle, sur chacun des rayons OA, OB, comme diamètre, on décrit une demi-circonférence : on demande le volume engendré par la surface plane comprise entre les trois demi-circonférences, lorsque la figure fait une révolution complète autour de AB.

823. Quel diamètre faut-il donner à un bassin hémisphérique pour que sa capacité soit un hectolitre?

824. On veut construire une chaudière ayant la forme d'un cylindre terminé par deux demi-sphères : déterminer le diamètre intérieur qu'il faut lui donner, sachant que ce diamètre doit être le quart de la longueur totale et que la capacité de la chaudière doit être de 60 hectolitres.

825. Calculer le volume et le poids de la terre supposée sphérique, sachant que sa densité moyenne est égale à 5,5 d'après *Cavendish*.

826. Les diamètres de la Terre, de la Lune et du Soleil étant proportionnels aux nombres $1, \frac{3}{11}, 112$, quels sont les volumes de la Lune et du Soleil, si l'on prend celui de la Terre pour unité?

827. Le diamètre AB d'un demi-cercle vaut 10^m et de l'extrémité A on mène une corde AC qui sous-tend un arc de 120° : quel est le volume engendré par le segment circulaire déterminé par cette corde, lorsque le demi-cercle tourne autour de AB.

828. Une sphère de 7^m de rayon est coupée par deux plans parallèles, menés d'un même côté du centre à des distances de ce point égales à 3^m et à 5^m : déterminer la surface de la zone comprise entre ces deux plans, ainsi que les surfaces des cercles qui lui servent de bases. Calculer en outre le volume du segment sphérique compris entre les deux plans parallèles.

829. Une sphère a pour rayon 8^m ; on mène un plan sécant à une distance du centre égale à la moitié du rayon : calculer le volume du segment détaché par ce plan.

830. Le diamètre AB d'un demi-cercle est égal à 20^m ; à partir de l'extrémité A on prend sur la demi-circonférence un arc AMC de 60° et du point C on abaisse sur AB la perpendiculaire CD : calculer le volume du segment sphérique engendré par la surface AMCD, lorsque le demi-cercle tourne autour de AB.

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE VIII.

Sur les mesures du fuseau, de l'onglet et du triangle sphérique.

831. Un fuseau, appartenant à une sphère de 8^m de rayon, a pour surface 15^{mq} : quel est l'angle de ce fuseau évalué en degrés, minutes et secondes? On prendra pour valeur approchée de π le nombre 3,1416.

832. Un onglet sphérique, dont l'angle est de 48°, a pour volume 6^{mc} : quel est le rayon de la sphère à laquelle appartient cet onglet. (Calcul par logarithmes.)

833. Le rayon d'une sphère est de 10^m; la surface d'un triangle sphérique ABC appartenant à cette sphère est de 24^{mq}; l'angle $A = 115^\circ$ et l'angle $B = 72^\circ$: calculer l'angle C en degrés, minutes et secondes.

NOTES.

NOTE I.

SUR LES LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

On sait qu'on appelle *lieu géométrique* ou *lieu* une figure dont tous les points jouissent d'une même propriété.

Dans la Géométrie plane, un lieu se compose d'une ou plusieurs lignes, et, dans la Géométrie de l'espace, d'une ou plusieurs lignes ou bien d'une ou plusieurs surfaces.

Dans la Géométrie élémentaire on ne considère que des lieux plans composés de droites ou de circonférences et des lieux dans l'espace composés de droites, de plans ou de surfaces sphériques; et il est à remarquer d'un autre côté que les lieux considérés sont, en général, des conséquences de théorèmes où l'on démontre : 1° que tout point d'une figure jouit d'une certaine propriété; et, 2°, que tout point n'appartenant pas à la figure ne jouit pas de cette propriété, ou bien que tout point jouissant de la propriété en question est situé sur la figure. Quelquefois aussi on commence par faire voir que tout point d'un lieu appartient à telle figure, et que tout point de cette figure est un point du lieu.

Lorsqu'il s'agit de trouver un lieu géométrique, un lieu plan, par exemple, on peut procéder de deux manières.

Première manière. — Par diverses considérations et surtout en construisant quelques points du lieu, convenablement choisis, on cherche à déterminer si ce lieu se compose de droites ou de circonférences; ainsi, lorsqu'on reconnaît que le lieu a des points à l'infini, il ne peut pas se composer de circonférences. De plus, en supposant que le lieu cherché soit une ligne droite, par exemple, on tâche de découvrir quelle est la position de cette droite, et alors la question revient, comme dans les *Éléments*, à démontrer un théorème, puis sa réciproque ou la proposition contraire.

Seconde manière. — Lorsqu'on a déterminé un certain nombre de lieux

géométriques, on cherche à faire voir qu'un lieu demandé revient à la détermination d'un lieu connu.

Il est donc important que les élèves constatent toujours avec soin quels sont les lieux qu'ils connaissent déjà, et cela nous engage à énumérer les lieux considérés dans le texte et dans les notes de nos *Éléments de Géométrie*. A la suite nous indiquerons aussi les questions de ce Recueil où il s'agit de trouver un lieu géométrique.

Lieux déterminés dans le texte des Éléments.

1. Le lieu des points d'un plan également distants d'un point fixe pris sur ce plan est une *circonférence* (24).

2. Le lieu des points d'un plan également distants des extrémités d'une droite située dans ce plan est la *perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite* (66, coroll.).

Cette perpendiculaire est aussi le lieu des points du plan tels, qu'en les joignant aux extrémités de la droite les deux nouvelles droites forment avec la première des angles égaux.

3. La *bissectrice d'un angle* est le lieu des points situés dans l'intérieur de l'angle et également distants de ses côtés (114, coroll. II).

Le lieu des points également distants de deux droites qui se coupent se compose de *deux droites indéfinies, bissectrices des angles formés par les premières droites* (114, coroll. II).

4. Dans un cercle, le lieu des milieux des cordes parallèles à une droite donnée est *le diamètre perpendiculaire à cette droite* (137, coroll. I).

5. Dans un plan, le lieu géométrique des sommets de tous les triangles rectangles qui ont pour hypoténuse une même droite est la *circonférence décrite sur cette droite comme diamètre* (143).

6. Dans un plan, le lieu des points situés d'un même côté de cette droite, d'où l'on voit cette droite sous un angle donné, est l'*arc* décrit sur la droite, capable de l'angle donné (178).

7. Dans l'espace, le lieu des points également distants des extrémités d'une droite est *le plan perpendiculaire sur le milieu de la droite* (320).

8. Dans l'espace, le lieu des points également distants de trois points donnés, non en ligne droite, est *l'axe de la circonférence passant par ces trois points* (323, conséq.).

9. Le *plan bissecteur d'un angle dièdre* est le lieu géométrique des points situés dans l'intérieur de cet angle et également distants de ses faces (397, coroll.).

Lieux déterminés dans les Notes sur les Éléments.

1. Si l'on fait mouvoir un angle dans son plan, de manière que ses côtés passent constamment par deux points fixes, le lieu décrit par le sommet de l'angle est une circonférence (Note 15, théor. II et Rem. II).

2. Un angle ASB et un point D étant donnés, si l'on mène par ce point deux transversales quelconques DBA, D*ba*, et les droites A*b*, B*a* qui se coupent au point M, le lieu du point M est la polaire du point D par rapport à l'angle ASB (Note 37, p. 386, théor. II).

3. Si, par un point D, pris dans le plan d'un cercle O, on mène une sécante quelconque DBA et qu'on détermine le conjugué harmonique C du point D, par rapport à la corde AB, le lieu géométrique du point C, lorsque la sécante tourne autour du point D, est une ligne droite perpendiculaire au diamètre *ab* qui passe par le point D.

4. Trouver le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à deux points fixes soit égale à un carré donné (Note 40, probl. I).

5. Trouver le lieu des points tels, que la différence des carrés de leurs distances à deux points fixes soit égale à un carré donné (Note 40, probl. II).

6. Le lieu des points d'égale puissance, par rapport à deux cercles donnés, est une droite perpendiculaire à la ligne des centres (Note 40, p. 408, théor. II).

7. L'axe radical de deux cercles qui n'ont aucun point commun ou qui sont tangents est le lieu des centres de tous les cercles qui coupent les deux premiers orthogonalement (Note 40, p. 410, 8°).

8. Trouver le lieu des points dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport donné (Note 42, p. 416, probl. I).

Questions de ce Recueil où il s'agit de trouver des lieux géométriques.

LIVRE Ier. — Questions : 6, 10, 11, 38, 43, 50, 61, 66, — Rem., 81, 131.

LIVRE II. — Questions : 164, 166.

LIVRE III. — Questions : 196, 197, 209, 210, 211, 226, 232, 233, 259, 271, 272, 273, 285, 287.

LIVRE IV. — Question : 352.

LIVRE V. — Questions : 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 403, 404, 408, 410, 424, 432.

LIVRE VI. — »

LIVRE VII. — 509, 519, 520, 549, 550, 551, 552.

LIVRE VIII. — 610, 620, 642, 643.

(Total : 51 lieux demandés.)

Observation I. — Un lieu géométrique est, en général, décrit par un point d'une figure qui varie d'une manière continue, d'après des conditions données, et qui se rattache à une figure fixe.

Par exemple, soit un triangle MAB dont la base AB est donnée de grandeur et de position, et supposons que les distances δ et δ' du sommet M aux points A et B satisfassent à la relation $\delta = \delta'$, le lieu du point M sera la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB. De même, si les distances δ et δ' satisfont à la relation $\frac{\delta}{\delta'} = \frac{m}{n}$ (m et n étant deux droites ou deux nombres donnés), le lieu du point M sera une circonférence.

Lorsqu'on définit un lieu géométrique par la relation qui existe constamment entre les distances δ et δ' de l'un quelconque de ses points M à deux points fixes A et B, on donne ordinairement à ces deux points le nom de *pôles;* les distances δ, δ' sont les *coordonnées* du point M et l'on dit que le lieu est défini par des coordonnées *bipolaires.* On dit aussi que la relation générale $f(\delta, \delta') = 0$ qui définit un lieu géométrique est l'*équation* de ce lieu, en coordonnées bipolaires.

Les équations en lignes définies par des coordonnées bipolaires et dont on s'occupe plus particulièrement sont toujours très-simples. Nous les indiquons dans le tableau suivant, en les faisant suivre des noms des lignes qu'elles représentent.

(1)	$\delta = \delta'$	ligne droite.
(2)	$\delta + \delta' = \text{const.} = m$ . . .	ellipse.
(3)	$\delta - \delta' = m$ et $\delta' - \delta = m$.	hyperbole.
(4)	$\delta\delta' = m^2$	ovales de Cassini.
(5)	$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{m}{n}$	circonférence.
(6)	$\delta^2 + \delta'^2 = m^2$	circonférence.
(7)	$\delta^2 - \delta'^2 = m^2$	ligne droite.

On voit que les équations (2), (3), (4) représentent des courbes qui ne sont pas du ressort des *Éléments de Géométrie.*

Si dans l'équation (4) on suppose que m soit égal à $\frac{AB}{2}$, c'est-à-dire à la moitié de la distance des pôles, la courbe représentée par l'équation $\delta\delta' = \frac{\overline{AB}^2}{4}$ se nomme *lemniscate.*

Observation II. — Au lieu de définir le lieu du point M par une relation entre δ et δ', on peut le faire au moyen des angles ω et ω' que les droites MA, MB font avec AB.

Ainsi l'équation $\omega = \omega'$ représente la perpendiculaire élevé sur le milieu de AB, et l'équation $\omega + \omega' = \text{const.} = \varphi$ représente l'arc du segment décrit sur la droite AB, capable de l'angle $180° - \varphi$.

Nous désignerons les angles ω et ω' sous le nom de *coordonnées biangulaires*.

Observation III. — Pour définir un lieu géométri ue on peut aussi employer la relation qui existe entre les distances de chaque point de ce lieu à deux droites fixes qui se coupent.

Soient xy, $x'y'$ ces deux droites qui se coupent en A, et MP, MP′ les perpendiculaires abaissées d'un point M du lieu sur xy et sur $x'y'$, et que nous désignerons par p et p'; alors l'équation $p = p'$ représente les deux droites qui sont bissectrices des angles formés par xy et $x'y'$.

L'équation $p + p' = \text{const.} = m$ représente le périmètre d'un rectangle (*voir* la question 66).

Les équations réunies $p - p' = m$ et $p' - p = m$ représentent les huit prolongements des côtés d'un rectangle.

Et l'équation $\frac{p}{p'} = \frac{m}{n}$ représente le système de deux droites passant par le point A.

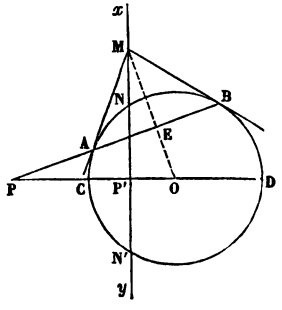
Les distances p, p' sont des *coordonnées biperpendiculaires*.

Observation IV. — Enfin on peut définir un lieu géométrique par la relation qui existe entre la distance de chaque point du lieu à un point fixe et sa distance à une droite fixe, et nous pourrions encore indiquer d'autres systèmes de coordonnées. Mais nous nous en tiendrons à ce qui précède.

Nous terminerons cette Note en résolvant les deux problèmes suivants, comme applications des deux manières de procéder pour trouver un lieu géométrique que nous avons indiquées plus haut.

PROBLÈME I. — *Par un point* P (*fig.* 25), *pris sur le plan d'un cercle* O, *on trace une sécante quelconque* PAB, *qui coupe la circonférence aux points* A *et* B, *et de ces points on mène deux tangentes qui se coupent en* M. *Quel est le lieu du point* M? (Ce problème n'est autre que la question 226.)

Fig. 25.



D'abord on voit qu'en menant du point P deux droites tangentes à la circonférence aux points N, N′, ces points appartiennent au lieu cherché, et qu'en menant des tangentes aux extrémités du diamètre CD, ces tangentes sont parallèles ou se rencontrent à l'infini. De là il est à présumer que le lieu demandé est une ligne droite, et, en effet, nous allons démontrer que

tout point de ce lieu est situé sur la droite $xNN'y$ et de plus que tout point de cette droite est un point du lieu.

Pour cela, concevons qu'on mène le rayon ON; alors les deux triangles rectangles PON, NP'O seront semblables et l'on aura

$$\frac{OP}{ON} = \frac{ON}{OP'},$$

d'où

$$(1) \qquad OP.OP' = \overline{ON}^2.$$

Maintenant soit M un point du lieu et supposons que de ce point on abaisse sur PO une perpendiculaire, que nous désignerons par MP"; puis menons la droite OM qui coupe la corde AB au point E; les deux triangles POE, MP"O seront aussi semblables; donc

$$\frac{OP}{OM} = \frac{OE}{OP''},$$

d'où

$$OP.OP'' = OM.OE;$$

mais le triangle MAO étant rectangle en A, on a

$$OM.OE = \overline{OA}^2$$

et par suite

$$(2) \qquad OP.OP'' = \overline{OA}^2 = \overline{ON}^2.$$

Ainsi, d'après les égalités (1) et (2), on a $OP' = OP''$; donc la perpendiculaire abaissée du point M sur PO se confond avec la droite $xNN'y$; donc déjà tout point du lieu cherché est situé sur cette droite.

D'ailleurs, en faisant varier la position de la sécante PAB d'une manière continue, les points tels que M se succéderont aussi d'une manière continue : donc tout point de la droite $xNN'y$ (à l'exception des points de la corde NN') est un point du lieu.

Donc enfin le lieu cherché se compose des deux prolongements Nx et $N'y$ de la corde NN'.

Remarque I. — Le point P est le *pôle* de la droite MP' et cette droite est la *polaire* du point P. Ces définitions adoptées d'abord ont été modifiées (*voir* nos *Éléments*, p. 388).

En désignant le rayon du cercle par R, on voit que les distances du centre au pôle P et à la polaire MP' sont liées par la relation

$$OP.OP' = R^2.$$

De là il résulte que, si la distance OP diminue, la distance OP' augmente;

que OP = OP′, si le point P est situé sur la circonférence ; donc *la polaire d'un point de la circonférence est la tangente en ce point.*

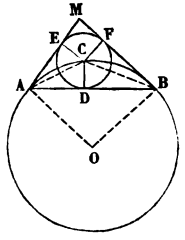
Remarque II. — Réciproquement, lorsqu'une droite MP′ a pour pôle le point P, c'est-à-dire lorsqu'on a l'égalité $OP.OP' = R^2$, si d'un point quelconque de MP′ on mène deux tangentes MA, MB, la ligne AB menée par les points de contact ou la *corde des contacts* passera constamment par le pôle P. Car, en désignant par P″ le point d'intersection de AB avec la droite OP′, perpendiculaire à MP′, on doit avoir

$$OP''.OP' = R^2;$$

donc OP″ = OP.

Problème II. — *On donne une corde* AB (*fig.* 26) *dans un cercle* O, *et d'un point quelconque* C *de l'arc* ACB *on abaisse sur* AB *une perpendiculaire* CD; *puis du point* C *comme centre, avec le rayon* CD, *on décrit un cercle, et des points* A, B *on mène à ce cercle des tangentes qui se coupent en* M. *Quel est le lieu des points tels que* M?

Fig. 26.



Si le point C se confond avec le point A, on voit que le point A est un point du lieu cherché, et il en est de même du point B; d'ailleurs, les trois points A, B, M ne sont pas en ligne droite et l'on peut conclure que le lieu demandé est une circonférence ou une partie de circonférence.

En effet, soient E et F les points de contact des tangentes AM, BM et menons les droites AC, CE, BC, CF; les deux triangles rectangles CAD, CAE seront égaux; donc l'angle CAD = CAE et par conséquent l'angle MAB = 2CAB, de même l'angle MBA = 2CBA. Or l'angle CAB a pour mesure $\frac{1}{2}$ CB et l'angle CBA a pour mesure $\frac{1}{2}$ CA; donc la somme des angles MAB et MBA a pour mesure l'arc ACB, et d'ailleurs cet arc est aussi la mesure de l'angle au centre AOB; donc on a la relation

$$MAB + MBA = \text{const.} = AOB;$$

donc le lieu cherché est l'arc du segment décrit sur la droite AB, capable de l'angle 180° — AOB.

Remarque. — Nous laissons aux élèves le soin de chercher ce que devient le lieu en question : 1° lorsque l'arc ACB est égal à une demi-circonférence ; 2° lorsqu'il est plus grand qu'une demi-circonférence; 3° lorsqu'il est égal à une circonférence entière.

Si le point C était un point quelconque des deux arcs sous-tendus par la corde AB, le lieu serait la circonférence circonscrite au triangle OAB.

NOTE II.

SUR DIFFÉRENTES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE DES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE.

Les problèmes de Géométrie peuvent se diviser d'abord en deux classes. La première comprend des *problèmes graphiques ou de construction*, et dans la seconde il s'agit de trouver un *nombre* au moyen de nombres donnés ou une *relation* entre certaines quantités. Mais les problèmes de cette seconde classe sont des questions d'Arithmétique ou d'Algèbre qui se rattachent à la Géométrie et nous nous occuperons seulement des problèmes graphiques.

Ces problèmes consistent, en général, à construire sur un plan une figure satisfaisant à des conditions données, et alors il peut se présenter deux cas :

1° Il peut se faire qu'une certaine figure soit donnée en grandeur et en position, et qu'il s'agisse d'y joindre une seconde figure d'après des conditions données.

Cette seconde figure est ordinairement une ligne droite, ou une circonférence, ou un triangle, ou un point.

2° Ou bien les données du problème sont seulement connues en grandeur. Elles consistent à indiquer les éléments essentiels de la figure cherchée et cette figure doit être construite de *toutes pièces*.

Dans ce second cas, on construit d'abord une portion de la figure cherchée avec quelques-uns des éléments donnés, ce qui peut se faire ordinairement de plusieurs manières, et l'on retombe dans le premier cas.

Nous nous bornerons donc à considérer des problèmes qui rentrent dans le premier cas et nous allons indiquer quelques méthodes pour les résoudre.

Méthode des substitutions successives. — Elle consiste à substituer au problème proposé un second problème, en remplaçant l'une des conditions exigées par une *condition équivalente*, c'est-à-dire telle que le second problème admette absolument la même solution ou les mêmes solutions que le premier ; puis au second problème on cherche à en substituer un troisième, etc., jusqu'à ce qu'on arrive à un problème dont la solution soit évidente ou simplement connue. De cette manière, la marche que l'on suit est comparable à celle qu'on emploie pour la résolution des équations. Exemple :

PROBLÈME. — *Étant données une circonférence* O *et une droite* xy, *mener à la circonférence une tangente qui fasse avec* xy *un angle donné* φ.

Supposons le problème résolu et soit AB la droite tangente à la circonférence au point A et faisant avec xy l'angle ABy égal à l'angle donné; alors de ce que l'angle AB$y = \varphi$ il s'ensuit que la direction de AB est déterminée et qu'elle est parallèle à une droite quelconque CD, faisant avec xy l'angle CDy égal à φ; ainsi le problème est ramené à celui-ci : *Étant donnée une circonférence* O, *mener à cette circonférence une tangente parallèle à une droite donnée* CD.

Maintenant, puisque la droite AB est tangente à la circonférence au point A, le rayon OA est perpendiculaire à AB et par conséquent à sa parallèle CD; donc, en abaissant du centre O une perpendiculaire OE sur CD, elle passera par le point de contact A et la question revient à ce problème résolu dans les *Éléments : Par un point donné sur une circonférence, mener une tangente à cette circonférence.*

La droite OE rencontre la circonférence en un second point A′ et la tangente à la circonférence au point A′ sera une seconde solution du problème.

En résumé, on peut remarquer que ce problème exige qu'on sache résoudre ceux-ci :

1. *Étant donnée une droite, tracer une seconde droite qui fasse avec la première un angle donné.*

2. *D'un point donné hors d'une droite abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

3. *Par un point donné sur une circonférence, mener une tangente à cette circonférence.*

Méthode des lieux géométriques. — La plupart des problèmes de Géométrie se ramènent en définitive à la détermination d'un ou de plusieurs points.

Si le point qu'on se propose de déterminer se trouve déjà sur une des lignes de la figure donnée, on cherche à reconnaître si ce point ne doit pas aussi être situé sur un certain lieu géométrique (qui doit être une ligne droite ou une circonférence), et s'il en est ainsi, le point d'intersection de ce lieu avec la ligne de la figure sera le point cherché. Par exemple, supposons qu'on veuille *mener par un point* A, *donné hors d'une circonférenee* O, *une tangente à cette circonférence*, on voit qu'il suffit de déterminer le point de contact M. Or, si l'on joint ce point au centre O et au point A, l'angle OMA est droit et par conséquent le point M est situé sur la circonférence décrite sur la droite OA comme diamètre; donc le point M sera déterminé par l'intersection de cette seconde circonférence avec la première.

Si le point cherché, auquel on ramène la résolution d'un problème, n'est pas situé sur une ligne de la figure donnée, on cherche à le déterminer par l'intersection de deux lieux géométriques.

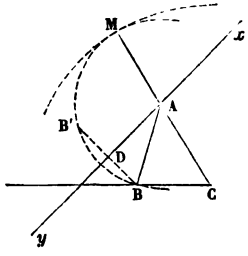
Par exemple, supposons qu'on veuille *décrire une circonférence passant par trois points donnés* A, B, C, on voit facilement que ce problème revient à déterminer le centre O de la circonférence; c'est-à-dire un point également distant des trois points donnés. Or, si on laisse de côté la condition qui exige que la circonférence passe par le point C, le centre O n'est plus déterminé; mais il doit être situé sur le lieu des points également distants des points A et B ou sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite AB. De même, si l'on fait abstraction du point A, le centre O doit se trouver sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite BC; ainsi le centre sera le point d'intersection des perpendiculaires élevées sur le milieu de AB et sur le milieu de BC.

D'après ce qui précède, on voit suffisamment combien l'emploi des lieux géométriques est important pour la résolution des problèmes. Seulement il est peut-être bon d'ajouter qu'on les emploie quelquefois pour déterminer un point qui n'appartient pas à la figure cherchée et dont dépend la résolution du problème proposé (*voir*, par exemple, la question 158).

Pour faire voir comment on peut faire dépendre la résolution d'un problème de la détermination d'un point n'appartenant pas à la figure cherchée, nous résoudrons encore ce problème :

Construire un triangle ABC (*fig.* 27), *connaissant la base* BC, *de grandeur et de position, la somme* AB + AC *des deux autres côtés et sachant que le sommet* A *doit être situé sur une droite donnée* xy.

Fig. 27.



Soit ABC le triangle demandé et prolongeons le côté CA d'une longueur AM égale à AB; alors on voit que le problème sera résolu, si l'on parvient à déterminer le point M.

Or ce point doit se trouver déjà sur la circonférence décrite du point C comme centre avec un rayon égal à la somme donnée CA + AB.

D'ailleurs, du sommet B abaissons sur xy la perpendiculaire BD et prolongeons-la d'une longueur DB' égale à DB, et supposons que du point A comme centre avec le rayon AB on décrive une circonférence; cette circonférence passera par les trois points B, B', M, et, comme la distance des centres des circonférences C et A est égale à la différence des rayons CM et AM, ces deux circonférences seront tangentes intérieurement au point M.

Ainsi, pour déterminer le point M, on décrira une circonférence passant par les deux points B, B', et tangente intérieurement à la circonférence qui a pour centre le point C (*voir* question 276) et, le point M étant connu, on mènera la droite MC qui coupera xy au point A, qui sera le sommet cherché.

Méthode des figures semblables. — *Voir* les questions 201, *Remarque.* — 293-341.)

Méthode par inversion ou pour renversement. — *Voir* la question 161.

Méthode des figures symétriques. — Pour comprendre en quoi elle consiste, on peut résoudre les trois problèmes suivants :

PROBLÈME I. — *Étant donnés deux points* A *et* B, *situés d'un même côté d'une droite* xy, *trouver sur cette droite un point* C *tel, que la somme de ses distances aux points* A *et* B *soit un* minimum.

PROBLÈME II. — *Étant donnés un point* A *et une circonférence* O, *situés d'un même côté de* xy, *trouver sur cette droite un point* C *tel, que la droite* CA *et la tangente* CD *menée du point* C *à la circonférence forment des angles égaux* ACx *et* DCy.

PROBLÈME III. — *Étant donnés deux points* A *et* B, *situés d'un même côté d'une droite* xy, *trouver sur cette droite un point* C *tel, qu'en le joignant au point* A *et au point* B, *l'angle* ACx *soit double de l'angle* BCy.

Supposons le problème résolu et prolongeons AC d'une longueur quelconque Cz, l'angle yCz égal à l'angle ACx sera le double de l'angle BCy et la droite qui joint le point C au point B′ symétrique du point B sera la bissectrice de l'angle yCz; donc le point B′ est également distant de la droite Cy et de la droite Cz et par conséquent la droite ACz est tangente à la circonférence décrite du point B′ comme centre avec un rayon égal à la moitié de BB′, etc.

Remarque. — On peut *voir* aussi les questions 126 et 158.

NOTE III.

QUELQUES MOTS SUR LA DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE.

Il est impossible de donner une règle générale pour démontrer les théorèmes de Géométrie et l'on doit se borner à quelques indications sur la marche à suivre dans ce genre de recherches.

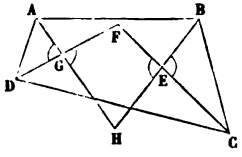
D'abord, il faut bien se pénétrer de l'énoncé du théorème que l'on veut démontrer, distinguer avec soin l'hypothèse et ses différentes parties, puis la conclusion à laquelle on veut arriver. De cette manière, on découvre assez ordinairement le livre, le chapitre et le paragraphe auxquels doit se rattacher le théorème proposé.

Ensuite, on cherche à démontrer le théorème en déduisant des seules

parties de l'hypothèse des conséquences successives jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la conclusion demandée.

Par exemple, soit à démontrer ce théorème : *Étant donné un quadrilatère* ABCD (*fig.* 28), *si l'on décrit des cercles tangents à trois côtés consécutifs, les centres des quatre cercles qu'on obtient forment un quadrilatère inscriptible.*

Fig. 28.



On voit que l'hypothèse se compose de cinq parties. On donne : 1° un quadrilatère ; 2° quatre cercles assujettis à certaines conditions.

Considérons d'abord ces quatre cercles et désignons par E le centre du cercle tangent aux côtés AB, BC, CD ; par F le centre du cercle tangent aux côtés BC, CD, DA ; par G le centre du cercle tangent aux côtés CD, DA, AB ; par H le centre du cercle tangent aux côtés DA, AB, BC.

De ce que le point E est le centre du cercle tangent aux trois côtés AB, BC, CD, il s'ensuit que E est le point d'intersection des bissectrices des angles ABC, BCD du quadrilatère, et de même les points F, G, H sont respectivement les points d'intersection des bissectrices CF et DF, DG et AG, AH et BH. Donc la question revient à démontrer que *les quatre bissectrices des angles d'un quadrilatère* ABCD *forment par leurs intersections un quadrilatère inscriptible.*

Pour cela il suffit de faire voir que deux angles opposés FEH, HGF du quadrilatère EFGH sont supplémentaires (c'est la question 41 de ce Recueil). Alors, de ce que ABCD est un quadrilatère, la demi-somme de ses angles est égale à deux droits ; ainsi l'on a

$$\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D = 2^{dr};$$

d'ailleurs les deux triangles EBC, GAD donnent

$$BEC + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C + AGD + \tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}A = 4^{dr};$$

donc on a

$$BEC + AGD = 2^{dr} \quad \text{ou} \quad FEH + HGF = 2^{dr}.$$

Remarque. — Ce théorème présente des particularités qu'il est bon de constater. D'abord, si l'on voulait construire la figure proposée, elle serait très-compliquée et, en général, il faut autant que possible éviter cet inconvénient ; on y est arrivé en remarquant que les centres des quatre cercles, donnés par hypothèse, sont les points d'intersection des bissectrices des angles du quadrilatère considérées deux à deux.

Cela fait, on a substitué à la conclusion demandée une égalité entre deux angles et l'on a démontré cette égalité, en ayant égard à la cinquième partie de l'hypothèse.

Assez souvent la substitution d'une conclusion à une autre peut être très-utile.

Théorème de Thalès. — Ce théorème : *Deux triangles équiangles entre eux* ABC, *abc ont leurs côtés homologues proportionnels*, fournit un exemple très-simple d'une démonstration sans construction.

En effet, l'hypothèse se compose de trois parties

$$A = a,\ B = b,\ C = c,$$

dont l'une est d'ailleurs une conséquence des deux autres.

Or, de ce que $B = b$, on a l'égalité

$$\frac{ABC}{abc} = \frac{AB}{ab} \cdot \frac{BC}{bc}$$

et de ce que $C = c$, on a

$$\frac{ABC}{abc} = \frac{AC}{ac} \cdot \frac{BC}{bc}.$$

Dans ces deux égalités, les premiers membres sont les mêmes; donc les seconds membres sont égaux, et si l'on supprime leur facteur commun $\frac{BC}{bc}$, il vient

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac};$$

En combinant de même les deux parties de l'hypothèse $A = a$ et $B = b$, il en résulte

$$\frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc};$$

donc on a la suite des rapports égaux

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc},$$

ce qu'il fallait démontrer.

On peut remarquer l'ordre logique suivi dans cette démonstration, consistant à se fonder sur la propriété de deux triangles qui ont un angle égal pour arriver à la propriété de deux triangles qui ont deux angles égaux chacun à chacun.

Des théorèmes démontrés au moyen d'une construction. — Si l'on ne parvient pas à démontrer un théorème en tirant des conséquences successives des différentes parties de l'hypothèse, il faut recourir à une *construction*, c'est-à-dire ajouter à la figure donnée quelques lignes qui puissent servir pour arriver à la démonstration. Alors le choix de ces lignes est toujours plus ou moins difficile et l'on ne doit le faire qu'avec une grande précaution, de manière à ne pas trop compliquer la figure. Ce n'est guère qu'après avoir résolu un assez grand nombre de théorèmes

que l'on acquiert quelque facilité pour discerner les lignes de construction qui peuvent être utiles.

Comme constructions remarquables qui se trouvent dans les *Éléments de Géométrie*, nous pouvons indiquer celle qui est employée par Euclide pour démontrer le théorème de Pythagore et celle qu'on emploie pour démontrer ce théorème de Ptolémée : *Le produit des diagonales d'un quadrilatère inscrit dans un cercle est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

Observation. — On doit à d'éminents géomètres, *Carnot*, *Poncelet*, *M. Chasles*, etc., des méthodes fécondes pour résoudre des questions de Géométrie et très-puissantes pour la découverte de nouvelles vérités ; mais nous pensons qu'il faut en exposer les principes dans des Ouvrages spéciaux faisant suite aux *Éléments de Géométrie*, sans en faire partie, et nous nous sommes borné dans ce Recueil à proposer des questions qui peuvent se résoudre indépendamment des méthodes modernes.

Il ne faut pas perdre de vue que les *Éléments de Géométrie* doivent former un Ouvrage classique destiné aux intelligences moyennes des élèves et que les matières contenues dans cet Ouvrage sont suffisamment étendues, surtout en y rattachant un Recueil de questions proposées.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT v

QUESTIONS PROPOSÉES.

QUESTIONS SUR LE LIVRE I.

CHAPITRE I.

§ I et II. — Sur la ligne droite et la ligne brisée. — Sur la plus petite et la plus grande droite qu'on puisse mener d'un point à une circonférence 1

CHAPITRE II.

§ I et II. — Sur les positions relatives de deux circonférences. — Sur la dépendance des arcs et des cordes 3

CHAPITRE III.

§ I, II et III. — Sur les angles, les perpendiculaires et obliques, les parallèles 5

§ IV. — Sur les triangles, les quadrilatères, les polygones 6

§ V. — Sur les propositions diverses 10

CHAPITRE IV.

§ I et II. — Sur le rayon perpendiculaire à une corde, l'angle inscrit dans un demi-cercle, la tangente 16

CHAPITRE V.

Pages.

§ I. — Sur la construction de triangles, de quadrilatères, de polygones.. 19

§ II. — Sur la division d'une droite en parties égales. — Division d'un angle droit en trois parties égales..... 20

§ III. — Sur les contacts..... 21

QUESTIONS SUR LE LIVRE II.

CHAPITRE I.

§ I. — Sur la mesure des droites..... 28

§ II. — Sur la mesure des angles..... 29

CHAPITRE II.

§ I. — Sur la mesure des surfaces polygonales..... 36

§ II. — Sur les carrés construits sur la somme ou la différence de deux droites, etc..... 39

QUESTIONS SUR LE LIVRE III.

CHAPITRE I.

§ I. — Sur les triangles semblables..... 43

§ II. — Sur les polygones semblables..... 46

CHAPITRE II.

§ I. — Sur les droites proportionnelles..... 51

§ II. — Sur les relations entre les côtés et divers autres éléments d'un triangle ou d'un quadrilatère..... 58

CHAPITRE III.

§ I. — Sur la construction et la division des polygones..... 75

§ II. — Construction d'un rectangle équivalent à un carré donné et dont la somme ou la différence des dimensions est égale à une droite donnée. — Division d'une droite en moyenne et extrême raison..... 83

QUESTIONS SUR LE LIVRE IV.

CHAPITRE I.

Pages.

§ I et II. — Sur les polygones réguliers..... 91

CHAPITRE II.

§ I, II et III. — Définitions. — Mesure de la circonférence et du cercle. — Calcul d'une valeur approchée de π..... 95

QUESTIONS SUR LE LIVRE V.

CHAPITRE I.

§ I, II et III. — Conséquences les plus immédiates de la définition du plan. — Perpendiculaires et parallèles dans l'espace..... 99

CHAPITRE II.

§ I, II et III. — Des positions relatives de la droite et du plan..... 101

§ IV. — Sur deux droites non situées dans le même plan..... 102

CHAPITRE III.

§ I, II et III. — Mesure des angles dièdres, plans perpendiculaires ou parallèles entre eux..... 104

§ IV et V. — Angles trièdres, angles polyèdres. — Propositions diverses. 105

QUESTIONS SUR LE LIVRE VI.

CHAPITRE I.

§ I. — Sur le prisme et plus particulièrement sur le parallélipipède..... 111

§ II. — Sur la pyramide et plus particulièrement sur le tétraèdre..... 113

CHAPITRE II.

Pages.

§ I. — Sur la mesure des parallélipipèdes et des prismes..... 117

§ II. — Sur la mesure de la pyramide, du tronc de pyramide, du tronc de prisme triangulaire..... 119

CHAPITRE III.

§ I et II. — Sur les figures symétriques..... 127

CHAPITRE IV.

§ I et II. — Sur les polyèdres semblables..... 129

CHAPITRE V.

Sur les polyèdres réguliers..... 130

QUESTIONS SUR LE LIVRE VII.

CHAPITRE I.

§ I, II et III. — Sur le cylindre, le cône et le tronc de cône..... 131

CHAPITRE II.

§ I, II et III. — Sections planes et plan tangent. — Pôles d'un cercle. — Polyèdres inscrits et polyèdres circonscrits à la sphère..... 137

§ IV. — Sur les surfaces de la zone et de la sphère..... 138

§ V. — Sur les volumes du secteur sphérique et de la sphère. — Sur le volume engendré par un segment circulaire. — Sur le segment sphérique..... 142

QUESTIONS SUR LE LIVRE VIII.

CHAPITRE I.

§ I et II. — Plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère. — Positions relatives de deux petits cercles..... 149

CHAPITRE II.

Pages.

§ I. — Angle de deux arcs de grand cercle et arcs de grand cercle perpendiculaires entre eux..... 151

§ II. — Triangles et polygones sphériques..... 152

CHAPITRE III.

De la mesure du fuseau, du triangle et du polygone sphériques. — De la mesure de l'onglet et des pyramides sphériques..... 156

QUESTIONS NUMÉRIQUES.

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE I..... 159

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE II..... 161
Sur la mesure des droites et des angles..... 161
Sur la mesure des surfaces polygonales..... 162

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE III..... 164
Sur les triangles et les polygones semblables..... 164
Sur les droites proportionnelles..... 164
Sur les relations entre les côtés et divers autres éléments d'un triangle ou d'un quadrilatère..... 165

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE IV..... 170
Sur les polygones réguliers..... 170
Sur les mesures de la circonférence et du cercle..... 171
Sur les angles évalués d'après un nouvel angle, pris pour unité..... 173

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE V..... 175

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE VI..... 176
Sur le prisme et la pyramide..... 176
Sur les mesures des volumes du parallélipipède et du prisme..... 177
Sur les mesures des volumes de la pyramide et du tronc de pyramide... 178
Sur les polyèdres semblables et sur les polyèdres réguliers..... 180

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE VII.....
Sur les surfaces et les volumes du cylindre, du cône et du tronc de cône
Sur les surfaces de la zone et de la sphère.....
Sur les volumes du secteur sphérique, de la sphère et du segment sphérique.....

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE VIII.....
Sur les mesures du fuseau, de l'onglet et du triangle sphérique.....

NOTES.

NOTE I. — Sur les lieux géométriques.. 187

NOTE II. — Sur différentes méthodes pour résoudre des problèmes de Géométrie..... 194

NOTE III. — Quelques mots sur la démonstration des théorèmes de Géométrie..... 197

TABLE DES MATIÈRES..... 201

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

CR

3117 Paris. — Imp. de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Pages.
QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE VII 181
Sur les surfaces et les volumes du cylindre, du cône et du tronc de cône. 181
Sur les surfaces de la zone et de la sphère 183
Sur les volumes du secteur sphérique, de la sphère et du segment sphérique 184

QUESTIONS NUMÉRIQUES SUR LE LIVRE VIII 186
Sur les mesures du fuseau, de l'onglèt et du triangle sphérique 186

NOTES.

NOTE I. — Sur les lieux géométriques 187

NOTE II. — Sur différentes méthodes pour résoudre des problèmes de Géométrie 194

NOTE III. — Quelques mots sur la démonstration des théorèmes de Géométrie 197

TABLE DES MATIÈRES 201

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

CR

3447 Paris. — Imp. de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Aug 3 - 1991